Université Pierre et Marie Curie — Mathématiques
LM216 — 2007/2008

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION 1

Exercice 1. (1) Les dérivées partielles de f :

1 pt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2(6-4y)x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^2 + 10y - 16$$

(2) (x,y) est un point critique si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ donc

0,75 pt.

$$x[4x^2 + 2(6-4y)] = 0 \text{ et } -4x^2 + 10y - 16 = 0$$

Les points critiques sont $(0, 8/5)$, $(1,2)$ et $(-1,2)$

(3) La matrice Hessienne de f en (x,y) :

1 pt.

$$d^2 f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2(6-4y) & -8x \\ -8x & 10 \end{pmatrix}$$

Pour trouver la nature de chaque point critique, il suffit de voir si la Hessienne en ce point est définie positive ou négative.

0,75 pt.

$$d^2 f_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \quad d^2 f_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \quad d^2 f_{(0,8/5)} = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

On déduit que f admet deux minimums locaux au points $(-1,2)$ et $(1,2)$, $(0,8/5)$ est un point selle.

(4) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1,5 pt.

$$\begin{aligned} f(x,y) - 3 =& x^4 + 2(3-2y)x^2 + 5y^2 - 16y + 13 \\ =& (x^2 + 3 - 2y)^2 - (9 - 12y + 4y^2) + 5y^2 - 16y + 13 \\ =& (x^2 + 3 - 2y)^2 + (y-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque $f(1,2) = f(-1,2) = 3$ alors $f(x,y) \geq f(1,2) = f(-1,2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ d'où f admet un minimum global atteint au points $(-1,2)$ et $(1,2)$.

Exercice 2. (1) C'est clair que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (c'est le quotient de deux polynômes avec un dénominateur non nul sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$). Ce qui entraîne que $x \mapsto f(x,tx)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Si $t = 0$ alors $f(x,0) = 0$ donc la fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$. Si $t \neq 0$:

1 pt.

$$\lim_{x \to 0} f(x,tx) = \lim_{x \to 0} \frac{t^4 x^4}{x^{2\alpha}(1+t^2)^\alpha} = \lim_{x \to 0} x^{4-2\alpha} \frac{t^4}{(1+t^2)^\alpha} = f(0,0) \quad \text{ssi } \alpha < 2$$

Conclusion : $x \mapsto f(x,tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ ssi ($\alpha < 2$ et $t \neq 0$) ou $t = 0$

(2) Supposons que $\alpha < 2$. Il suffit de montrer que f est continue en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

0,5 pt.

$$|f(x,y)| = \frac{|x||y|^3}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq (x^2+y^2)^{2-\alpha}$$

car $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. On conclut que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Réciproquement, si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors $\alpha < 2$. Par contraposé, on suppose que $\alpha \geq 2$ est montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet

0,5 pt.
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } \alpha = 2 \\ \pm\infty & \text{si } \alpha > 2 \end{cases} \neq f(0,0)$$

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

1,5 pt.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3[(1-2\alpha)x^2+y^2]}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2[3x^2+(3-2\alpha)y^2]}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}$$

(4) f est différentiable en $(0,0)$ si
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} = 0$$
avec $df_{(0,0)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$. D'après la question 2,

0,5 pt.
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)^{\alpha+1/2}} = 0$$
ssi $\alpha + 1/2 < 2$.

(5) Si $\alpha < 3/2$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

1 pt.
$$\begin{aligned} |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| &\leq \frac{|y|^3(|1-2\alpha|x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\ &\leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}(|1-2\alpha|+1)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\ &\leq (|1-2\alpha|+1)(x^2+y^2)^{3/2-\alpha} \end{aligned}$$

Par des majorations analogues, on montre que
$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq (3+|3-2\alpha|)(x^2+y^2)^{3/2-\alpha}$$
Puisque $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{3/2-\alpha} = 0$ si $\alpha < 3/2$ alors
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$
On conclut que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$ d'où $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.