Normes

Exercice 1 **- Pour commencer...** - *L2/Math Spé* - ⋆

Posons $y = 5$ et $x = -3$. Alors $5x + 3y = 0$, d'où $N(-3, 5) = 0$ sans que $(-3, 5)$ ne soit le vecteur nul. N n'est pas une norme !

Exercice 2 **- Les classiques !** - *L2/Math Spé* - ⋆

Il suffit d'appliquer la définition d'une norme, et de vérifier les 3 propriétés essentielles. La difficulté principale est l'inégalité triangulaire pour la norme N_2. Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i\beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right)^{1/2}.$$

Pour $\alpha = (x_0, y_0)$ et $\beta = (x_1, y_1)$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} N_2(\alpha+\beta)^2 & = & (x_0+x_1)^2 + (y_0+y_1)^2 \\ & = & x_0^2 + x_1^2 + y_0^2 + y_1^2 + 2x_0x_1 + 2y_0y_1 \\ & = & (x_0^2+y_0^2) + (x_1^2+y_1^2) + 2(x_0x_1+y_0y_1) \\ & \leq & N_2(\alpha)^2 + N_2(\beta)^2 + 2(x_0^2+y_0^2)^{1/2}(x_1^2+y_1^2)^{1/2} \\ & \leq & N_2(\alpha)^2 + N_2(\beta)^2 + 2N_2(\alpha)N_2(\beta) \\ & \leq & \left(N_2(\alpha)+N_2(\beta)\right)^2. \end{array}$$

D'autre part, on a $|x|^2 \leq |x|^2 + |y|^2$ ce qui donne $|x| \leq N_2(\alpha)$, et de même $|y| \leq N_2(\alpha)$. Passant au max, on obtient $N_\infty(\alpha) \leq N_2(\alpha)$. D'autre part $(|x|+|y|)^2 \geq x^2+y^2$ et donc $N_2(\alpha) \leq N_1(\alpha)$. Enfin, $|x| \leq N_\infty(\alpha)$ et $|y| \leq N_\infty(\alpha)$ et donc $N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha)$. Les normes sont équivalentes : c'est clair que N_∞ encadre les deux autres. Enfin, on a :

$$N_2(\alpha) \leq N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha).$$

Exercice 3 **- Fonctions continues** - *L2/Math Spé* - ⋆

Pour la norme $\|.\|_\infty$: on arrive bien dans $\mathbb{R}_+$. D'autre part, si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout x dans $[0, 1]$, on a $f(x) = 0$, et donc $f = 0$. Etudions l'inégalité triangulaire : soient f et g deux éléments de E. Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Passant au max, on obtient :

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Concernant l'homogénéité, prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ et f dans E. Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|,$$

et passant au max, on a bien l'égalité voulue.
Pour la norme $\|.\|_1$: on arrive bien dans $\mathbb{R}^+$. Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si, et seulement si, il s'agit de la fonction nulle. Rappelons d'autre part que si

f est continue, alors $|f|$ est continue. On a donc démontré $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$. D'autre part, pour tout x de $[0, 1]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Intégrer cette inégalité entre 0 et 1 donne l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_1$. En effet, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Remarquons que, pour chaque x de $[0, 1]$, on a :

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1, et on trouve :

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty.$$

Pour $f_n(x) = x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Si les normes étaient équivalentes, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$. Pour $f = f_n$, on obtient :

$$\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1 \iff 1 \leq \frac{C}{n+1},$$

et un passage à la limite en n donne $1 \leq 0$.

Exercice 4 - Espace de matrices - *L2/Math Spé* - ⋆

La démonstration du fait qu'il s'agit une norme est une simple modification du cas classique de la norme infinie dans $\mathbb{R}^p$. Montrons qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, en prenant $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, et en posant $C = AB$. Ecrivons $C = (c_{i,j})$. On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$. On a donc :

$$\begin{aligned} n|c_{i,j}| &\leq n\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}| \\ &\leq n\sum_{k=1}^n \frac{N(A)}{n}\frac{N(B)}{n} \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

Exercice 5 - Des polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆

La démonstration qu'il s'agit de normes suit en tout point celle classique concernant les mêmes normes sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$. Prenons $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Alors $N_1(P_n) = n + 1 \leq C$, ce qui est impossible pour n grand. Si $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$, pour le même polynôme P_n, on a $N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \leq C$, ce qui est toujours impossible. Enfin, la même suite de polynômes, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$ est tout aussi impossible.

Exercice 6 - Sup de deux normes - *L2/Math Spé* - $\star$

On vérifie les trois propriétés définissant une norme (on remarque que N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). D'une part, si $N(x)=0$, alors $N_1(x)=0$ et donc $x=0$ puisque N_1 est une norme. Ensuite, si $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \sup\big(N_1(\lambda x),N_2(\lambda x)\big)\\ &= \sup\big(|\lambda|N_1(x),|\lambda|N_2(x)\big)\\ &= |\lambda|\sup\big(N_1(x),N_2(x)\big)\\ &= |\lambda|N(x).\end{aligned}$$

Enfin, prouvons l'inégalité triangulaire pour N. En effet, si x et y sont dans E, alors d'une part

$$N_1(x+y)\leq N_1(x)+N_1(y)\leq N(x)+N(y)$$

et d'autre part

$$N_2(x+y)\leq N_2(x)+N_2(y)\leq N(x)+N(y).$$

En passant au sup, on obtient bien

$$N(x+y)\leq N(x)+N(y).$$

Exercice 7 - Norme 2 "perturbée" - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Le seul point non immédiat est de vérifier que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, on s'inspire du même résultat concernant la norme euclidienne usuelle. Prenons en effet (x_1,y_1) et (x_2,y_2) dans $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} N^2(x_1+y_1,x_2+y_2) &= a^2(x_1+x_2)^2+b^2(y_1+y_2)^2\\ &= a^2x_1^2+a^2x_2^2+b^2y_1^2+b^2y_2^2+2a^2x_1x_2+2b^2y_1y_2\\ &= a^2x_1^2+a^2x_2^2+b^2y_1^2+b^2y_2^2+2\big((ax_1)(ax_2)+(by_1)(by_2)\big)\\ &\leq a^2x_1^2+a^2x_2^2+b^2y_1^2+b^2y_2^2+2\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2}\sqrt{a^2x_2^2+b^2y_2^2}\end{aligned}$$

   où la dernière ligne est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc obtenu

$$N^2(x_1+y_1,x_2+y_2)\quad\leq\quad\left(\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2}+\sqrt{a^2x_2^2+b^2y_2^2}\right)^2$$

   ce qui est bien l'inégalité triangulaire voulue.
2. (x,y) est dans cette boule si et seulement si $a^2x^2+b^2y^2\leq 1$. On reconnait une ellipse dont les extrémités des axes sont les points $\left(\pm\frac{1}{a},0\right)$ et $\left(0,\pm\frac{1}{b}\right)$.
3. Supposons par exemple $a\leq b$. Alors, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a

$$N(x,y)\leq\sqrt{b^2x^2+b^2y^2}\leq b\|(x,y)\|_2.$$

   De plus, pour tous les éléments de la forme $(0,y)$, on a égalité. Le nombre p recherché est donc $\max(a,b)$. Un raisonnement similaire montre que le nombre q recherché est $\min(a,b)$.

Exercice 8 - Normes sur les polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. La seule difficulté est de vérifier que $N_a(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si $N_a(P) = 0$, on a à la fois $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)|dt = 0$. Or, $|P'|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. Donc $P' = 0$ sur $[0, 1]$. Comme P' est un polynôme, ceci entraîne que $P' = 0$ ou encore que P est un polynôme constant. Puisque $P(a) = 0$, on en déduit que P est identiquement nul.
2. Supposons que N_a et N_b sont équivalentes. Alors, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$C_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq C_2 N_a(P).$$
Pour $n \geq 0$, soit $P(X) = X^n$. On a
$$N_a(P) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1} dt = a^n + 1 \text{ et } N_b(P) = b^n + 1.$$
On en déduit alors que, pour tout $n \geq 0$,
$$b^n + 1 \leq C_2(a^n + 1) \iff 1 + \frac{1}{b^n} \leq C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{1}{b^n}.$$
Or, le membre de droite tend vers 1 et le membre de gauche vers 0. On obtient en passant à la limite $1 \leq 0$, ce qui est absurde. L'hypothèse de départ est donc fausse, et N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors
$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)dt \leq \int_0^1 |P'(t)|dt.$$
Ainsi,
$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_a(P).$$
Il vient
$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq 2N_a(P).$$
On a de la même façon
$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_b(P)$$
et donc
$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$
Les deux normes sont bien équivalentes.

Exercice 9 - Drôle de norme ! - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. D'abord, si $N(x,y)=0$, alors pour tout t, on a $x+ty=0$. Choisir $t=0$ montre que l'on a $x=0$. Ensuite, si on prend $t=1$, on obtient également $y=0$, et donc $(x,y)=0$. L'homogénéité est claire. Enfin, pour tous (x,y) et tous (x',y'), on a

$$|((x+x')+t(y+y')|\leq|x+ty|+|x'+ty'|,$$

en utilisant simplement l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue. On en déduit :

$$\frac{|((x+x')+t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}}\leq\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{|x'+ty'|}{1+t^2}\leq N(x,y)+N(x',y').$$

Passant au sup, on obtient :

$$N((x,y)+(x',y'))\leq N(x,y)+N(x',y').$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$|x+ty|\leq\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+t^2},$$

ce qui donne

$$\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}\leq N_2(x,y).$$

Pour minorer $N(x,y)$ à l'aide de $N_2(x,y)$, on va donner une valeur particulière au paramètre t. Pour cela, on va (enfin !) étudier la fonction qui à t associe $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, ou plus précisément le carré de cette fonction. On pose donc :

$$f(t)=\frac{(x+ty)^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Le calcul de la dérivée donne, après simplifications :

$$f'(t)=\frac{2(x+ty)(y-tx)}{(1+t^2)}.$$

f est donc maximale pour $t=y/x$. Et si on évalue en y/x la quantité $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, on trouve précisément... $N_2(x,y)$. On vient donc de démontrer que $N(x,y)=N_2(x,y)$, ce qui nous aurait bien simplifié la vie pour les questions précédentes... il suffit de donner par exemple la valeur 1 et la valeur -1 au paramètre t.

3. Voila une explication, parmi d'autres, au fait que $N=N_2$. La distance (dans le plan muni d'un repère euclidien) du point M de coordonnées (x,y) à la droite d'équation $X+tY=0$ vaut précisément $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$. Cette distance est toujours inférieure à la distance de M à l'origine, qui vaut $N_2(x,y)$. Voila pourquoi on a $N(x,y)\leq N_2(x,y)$. Cette distance vaut exactement la distance à l'origine lorsque la droite que l'on considère est perpendiculaire à (OM). C'est ainsi que l'on a $N(x,y)\geq N_2(x,y)$.

Exercice 10 - Une norme ? - *L1/Math Sup/Oral Centrale* - ⋆⋆⋆

1. La seule propriété qui pose problème est de prouver que si $N_g(f)=0$, alors $f=0$.
   Si N_g n'est pas une norme, alors il existe $f\in\mathcal{C}([0,1])$, $f\neq 0$, avec $N_g(f)=0$. Autrement, $f(x)g(x)=0$ pour tout $x\in[0,1]$. Puisque f est continue et non-nulle, il existe un intervalle I, non réduit à un point, sur lequel f ne s'annule pas. Mais alors, on en déduit que g doit être nulle sur I.
   Réciproquement, si g s'annule sur un intervalle I non-réduit à un point, alors on peut construire f continue qui s'annule hors de I et tel qu'il existe $a\in I$ avec $f(a)\neq 0$ (faire un dessin et construire f comme un "pic"). On a donc $f\neq 0$ et $N_g(f)=0$, donc N_g n'est pas une norme.
   Par contraposée, on en déduit que N_g est une norme si et seulement si g ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.
2. Remarquons déjà que g, continue sur le segment $[0,1]$, est bornée par une constante $M>0$. On a donc $N_g(f)\leq M\|f\|_\infty$ pour tout $f\in E$. Supposons de plus que g ne s'annule pas. Alors, puisque $|g|$ est continue et atteint ses bornes sur $[0,1]$, il existe $\delta>0$ tel que $|g(x)|\geq\delta$ pour tout $x\in[0,1]$. On a alors clairement $N_g(f)\geq\delta\|f\|_\infty$ et les deux normes sont équivalentes.
   Réciproquement, si g s'annule, prouvons que les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit $M>0$. On va construire $f\in E$, $f\neq 0$, tel que $\|f\|_\infty\geq MN_g(f)$. Pour cela, on sait, par continuité de g, qu'il existe un intervalle I, non-réduit à un point, et contenu dans $[0,1]$, tel que $|g(x)|\leq\frac{1}{M}$ pour tout $x\in[0,1]$. Comme à la question précédente, on peut construire f nulle en dehors de I, avec $\|f\|_\infty\leq 1$ et $f(a)=1$ pour au moins un a de I. On a alors
   $$\|f\|_\infty=1 \text{ tandis que } N_g(f)=\sup_{x\in I}|g(x)f(x)|\leq\frac{1}{M}.$$
   Ceci prouve bien l'inégalité annoncée, et les deux normes ne sont pas équivalentes. En conclusion, on a démontré que les deux normes sont équivalentes si et seulement si g ne s'annule pas.

Exercice 11 - **Oh les boules !** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Pour comprendre ce type d'exercice, il faut impérativement commencer par réaliser un dessin.

1. La contrainte la plus forte exprimée par l'inclusion $B(a,r)\subset B(a,s)$ est obtenue pour le point de $B(a,r)$ le plus éloigné de b possible. On considère ce point qui est donné par $x=a+r(a-b)/\|a-b\|$. x est dans $B(a,r)$, donc dans $B(b,s)$. Or
   $$x-b=\left(1+\frac{r}{\|b-a\|}\right)(a-b)\implies\|x-b\|=\|b-a\|+r.$$
   Puisque $\|x-b\|\leq s$, on en déduit le résultat recherché.
2. Cette fois, on considère y "le" point de $B(a,r)$ le plus proche de b. On a donc $y=a+r(b-a)/\|b-a\|$. Puisque $y\notin B(b,s)$, on a $\|y-b\|>s$. Mais on a aussi
   $$y-b=\left(1-\frac{r}{\|b-a\|}\right)(a-b)\implies\|y-b\|=\|b-a\|-r.$$
   Ceci donne le résultat voulu.

Ouverts, fermés, adhérence, intérieur...

Exercice 12 - - *L2/Math Spé* - ⋆

A, F et H sont ouverts. B, G sont fermés, les autres ne sont ni ouverts ni fermés.

Exercice 13 - - *L2/Math Spé* - ⋆

On va écrire l'ensemble A autrement :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Remarquons que A est fermé, et donc $\bar{A} = A$. D'autre part, l'intérieur de l'intersection vaut l'intersection des intérieurs. On a donc :

$$\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 > 1\}.$$

La frontière est alors :

$$\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Exercice 14 - **Fermeture et adhérence d'un convexe** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $x, y \in \bar{C}$, et $t \in [0,1]$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de C. Puisque C est convexe, la suite

$$z_n = tx_n + (1-t)x_n$$

est dans C. On passe à la limite : la suite (z_n) converge vers $tx + (1-t)y$, et cette limite est dans $\bar{C}$. D'où $tx + (1-t)y \in \bar{C}$, ensemble qui est donc convexe.

Prouvons maintenant le résultat concernant l'adhérence. Soit $x, y \in \overset{\circ}{C}$, $x \neq y$, et soit $z \in]x, y[$. Alors il existe une (unique) homothétie de centre x qui envoie y sur z (une homothétie de centre x est une application de la forme $w \mapsto x + \lambda(w - x)$. Cette homothétie transforme la boule de centre y et de rayon δ en la boule de centre z et de rayon $\lambda\delta$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(y, \delta) \subset C$ et soit $w \in B(z, \lambda\delta)$. Alors $w = h(u)$, avec u un point de $B(y, \delta)$, et h l'homothétie précédemment considérée. En particulier,w est sur le segment $[x, u]$ et est donc un élément de C. Autrement dit, on vient de prouver que $B(z, \lambda\delta) \subset C$, ce qui prouve $z \in \overset{\circ}{C}$. $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Exercice 15 - **Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel** - *L2/Math Spé* - ⋆

1. Soit $x, y \in \bar{V}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de V. Puisque V est un sous-espace vectoriel, la suite

   $$z_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

   évolue dans V. On passe à la limite : z_n converge vers $z = \lambda x + \mu y$, qui est élément de $\bar{V}$ puisque $z_n \in V$.
2. Soit $a \in V$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$. Soit $x \in B(0, \varepsilon)$. Puisque $x + a \in B(a, \varepsilon) \subset V$ et que V est un espace vectoriel, on a $x \in V$. D'où $B(0, \varepsilon) \subset V$. Si maintenant $x \neq 0$ est dans E, alors $z = \frac{\varepsilon x}{2\|x\|}$ est dans $B(0, \varepsilon)$, donc dans V, et puisque V est un sous-espace vectoriel, c'est aussi le cas de x.

Exercice 16 - Adhérence de boules - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit $B = B(x, R)$ une telle boule ouverte, et $y \in \bar{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe z dans B avec $\|z - y\| \leq \varepsilon$. On en déduit que :

$$\|z - x\| \leq R + \varepsilon,$$

et donc puisque ceci est vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, $\|z - x\| \leq R$, ce qui montre une inclusion. D'autre part, si y est dans la boule fermée de centre x et de rayon R, il suffit de se restreindre à y sur la sphère, et si ε est un réel positif, on considère :

$$z = x + (R - \varepsilon)\frac{y - x}{R}.$$

Alors, on a $\|z - x\| \leq R - \varepsilon \implies z \in B$ et $\|z - y\| \leq \varepsilon\|x\|$. Ceci montre que $y \in \bar{B}$.

**Exercice 17 - ** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On va considérer une partie de $\mathbb{R}$. Un singleton est d'intérieur vide, et un intervalle ouvert a pour adhérence l'intervalle fermé : on considère donc d'abord :

$$B = \{0\} \cup]1, 2[.$$

Si l'on veut ensuite que l'intérieur de l'adhérence de A soit différent de A, il est judicieux que 2 soit dans l'intérieur de l'adhérence de A, et pour cela on colle un intervalle ouvert de l'autre côté de A. On pose alors :

$$A = \{0\} \cup]1, 2[\cup]2, 3[.$$

On a :

$$\mathring{A} =]1, 2[\cup]2, 3[,$$

$$\bar{A} = \{0\} \cup [1, 3],$$

$$Int(\bar{A}) =]1, 3[,$$

$$Adh(\mathring{A}) = [1, 3],$$

ce qui prouve bien que tous ces ensembles sont différents.

Exercice 18 - Somme d'un ensemble et d'un ouvert - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Remarquons que :

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + b.$$

La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert, il suffit de prouver que $A + \{b\} =$ est ouvert pour chaque b de B. Soit $z \in A + \{b\}$, $z = x + b$ avec $x \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mais alors, $B(z, \varepsilon) = B(x + b, \varepsilon) \subset A + b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y - b) - x) < \varepsilon$, et donc $y - b = a$ avec $a \in B(x, \varepsilon) \subset A$. D'où $y = a + b \in A + \{b\}$.

Exercice 19 - La frontière ! - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Soit $x \in \mathrm{Fr}(A)$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $x \in \bar{A}$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. D'autre part, puisque $x \notin \mathring{A}$, $B(x, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans A, ce qui se reformule en $B(x, \varepsilon) \cap C_A \neq \varnothing$. L'inclusion réciproque se démontre en remontant simplement les étapes.

2. Si l'on remarque que le complémentaire du complémentaire de A est A lui-même, l'écriture précédente de $\mathrm{Fr}(A)$ prouve que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_A)$.
3. Si A est fermé, alors $\bar{A} \subset A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, soit $x \in \bar{A}$.
   – Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors $x \in \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
   – Si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors évidemment $x \in A$.
   Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in A$ et donc $\bar{A} \subset A$: A est fermé.
4. Si A est ouvert, alors $\overset{\circ}{A} = A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$, alors pour chaque $x \in A$, $x \notin \mathrm{Fr}(A)$, et donc $x \in \overset{\circ}{A}$ (puisqu'évidemment $x \in \bar{A}$).

Exercice 20 - Diamètre d'une partie bornée - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. Soit M tel que $A \subset B(0, M)$. Soit $x \in \bar{A}$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x. Alors, par passage à la limite :
$$\|x_n\| \leq M \implies \|x\| \leq M.$$
   Donc $\bar{A}$ est borné, et comme $\mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ est bornée aussi.
2. On a les inclusions :
$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A},$$
   qui donnent clairement :
$$\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A}) \leq \mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\bar{A}).$$
   La première inégalité peut être stricte : en effet, si on prend $E = \mathbb{R}$, et $A = [0, 1] \cup \{2\}$, alors $\overset{\circ}{A} =]1, 2[$, et on a :
$$\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A}) = 1, \ \mathrm{diam}(A) = 2.$$
   En revanche, on a toujours $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\bar{A})$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieure, il existe x et y dans $\bar{A}$ tels que :
$$\|x - y\| \geq \mathrm{diam}(\bar{A}) - \varepsilon.$$
   Mais, par définition de l'adhérence, il existe des éléments x' et y' de A tels que :
$$\|x - x'\| \leq \varepsilon \text{ et } \|y - y'\| \leq \varepsilon.$$
   On en déduit :
$$\|x' - y'\| \geq \|x - y\| - \|x' - x\| - \|y' - y\| \geq \mathrm{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon.$$
   On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$\mathrm{diam}(\bar{A}) \geq \mathrm{diam}(A) \geq \mathrm{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon.$$
   Ceci prouve bien que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\bar{A})$.
3. (a) Il est clair que $\mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A} \implies \mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}\, \bar{A} = \mathrm{diam}\, A$, d'après le résultat de la question précédente.

(b) Soit M tel que $A \subset B(0,M)$. On a alors, pour $t \in X$:

$$\|x+tu\| \leq M \implies \|tu\| - \|x\| \leq M \implies t\|u\| \leq M + \|x\|,$$

et dont l'ensemble X est borné par $\frac{M+\|x\|}{\|u\|}$. En particulier, sa borne supérieure existe.

(c) Une telle demi-droite est un ensemble de la forme $\{x+tu;\ t \geq 0\}$. Soit t la borne supérieure de l'ensemble X donné par la question précédente : on va prouver que $x+tu \in \mathrm{Fr}(A)$. En effet, si $\varepsilon > 0$:
- Il existe t_1 dans X tel que $t - \varepsilon < t_1 < t$, et donc la boule de centre $x+tu$ de rayon ε rencontre A en $x + t_1 u$.
- $x + (t+\varepsilon/2)u$ n'est pas dans A : c'est donc un point d'intersection du complémentaire de A et de la boule de centre $x+tu$ et de rayon ε.

(d) Soit $\varepsilon > 0$ et x, y dans A tels que

$$\|x-y\| \geq \mathrm{diam}(A) - \varepsilon.$$

On pose $u = y - x$, et X l'ensemble donné par la question (c). On note t_0 la borne sup de X. Il est clair que $t_0 \geq 1$ (puisque $1 \in X$), et d'après la question précédente, $z = x + t_0 u \in \mathrm{Fr}(A)$. Il faut ensuite trouver un deuxième point à la frontière, qu'on trouve en traçant la deuxième demi-droite : pour $v = x - y$, on considère l'ensemble des points $x + tv$. Comme auparavant, on trouve un point à la frontière z'. Il reste à conclure que :

$$z' - z = x + (t_1 v) - (x+t_0)u = (t_1 - t_0)(x-y),$$

ce qui donne :

$$\|z' - z\| \geq \|x-y\| \geq \mathrm{diam}(A) + \varepsilon.$$

Exercice 21 - Dense ou fermé - *L3/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆⋆

1. On commence par remarquer que F est un hyperplan de E, car c'est le noyau de la forme linéaire $f \mapsto f(0)$. Ainsi, si $a \notin F$, on sait que $E = F \oplus \mathbb{R}a$. Supposons maintenant que F n'est pas fermé. Alors, on peut trouver une suite (x_n) de F et un élément $a \notin F$ telle que $x_n \to a$. Prenons maintenant $y \in E$. y s'écrit $x + \lambda a$, avec $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, la suite $u_n = x + \lambda x_n$ est une suite de F et elle converge vers y. Ainsi, F est dense dans E.
2. Posons $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|;\ t \in [0,1]$. Alors la forme linéaire $l(f) = f(0)$ est continue pour cette norme puisque $|l(f)| \leq \|f\|_\infty$. On en déduit que F est fermé puisque $F = l^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
   Dans le second cas, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Il est très classique de vérifier que c'est une norme sur E. De plus, F est dense E pour cette norme. En effet, prenons $g \in E$, et soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\delta |g(t)|dt + \delta|g(\delta)| \leq \varepsilon$$

   (en effet, le membre de gauche tend vers 0 lorsque δ tend vers 0). On définit alors f par $f(t) = g(t)$ pour $t \in [\delta, 1]$ et $f(t) = tg(\delta)/\delta$ si $t \in [0,\delta]$. Alors $f \in F$ et

$$\|f-g\|_1 = \int_0^\delta |f(t)-g(t)|dt \leq \int_0^\delta |f(t)|dt + \int_0^\delta |g(t)|dt \leq \varepsilon.$$

   Ceci prouve que F est dense dans E.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 22 - Sous-espaces vectoriels - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit F un tel sous-espace, et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. On complète $(e_1,\dots,e_p)$ en une base $(e_1,\dots,e_q)$ de E. On considère enfin la norme N sur E :

$$N\left(\sum_{i=1}^q x_ie_i\right)=\max_i |x_i|.$$

Rappelons que, puisque E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, il suffit de prouver que F est fermé relativement à cette norme. Soit $(x(n))$ une suite de F, qui converge vers $x\in E$ pour cette norme. Chaque $x(n)$ s'écrit :

$$x(n)=x_1(n)e_1+\dots x_p(n)e_p+x_{p+1}(n)e_{p+1}+\dots+x_q(n)e_q,$$

avec $x_i(n)=0$ si $i\geq p+1$. On décompose également x sous cette forme :

$$x=x_1e_1+\dots+x_qe_q.$$

Remarquons maintenant que :

$$|x_i(n)-x_i|\leq N(x(n)-x).$$

Ceci prouve que chaque suite $(x_i(n))$ converge vers x_i (dans un evn de dimension finie, la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée). En particulier, pour $i\geq p+1$, $x_i=0$ ce qui prouve que $x\in F$.

Exercice 23 - Intégrale jamais nulle - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆

On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$. L'idée est que toutes les normes sont équivalentes sur E, et on va utiliser deux normes différentes, chacune étant bien adaptée à une partie du problème. La première est

$$\|P\|_1=\int_0^1|P(t)|dt$$

dont on sait que c'est une norme. D'autre part, pour $P(X)=a_nX^n+\dots+a_1X+a_0$, on pose

$$N(P)=\sup_k |a_k|.$$

Il s'agit aussi d'une norme sur E. En utilisant N, on vérifie aisément que E_n est une partie fermée de E. En effet, l'application linéaire $\phi(P)=a_n$, où $P(X)=a_nX^n+\dots+a_1X+a_0$, est continue puisqu'elle vérifie

$$|\phi(P)|\leq N(P).$$

On conclut alors de la façon suivante : si $\inf_{P\in E_n}\int_0^1|P(t)|dt=\inf_{P\in E_n}\|P\|_1=0$, on peut trouver une suite (P_k) de E_n telle que $\|P_k\|_1\to 0$. Autrement dit, (P_k) converge vers 0. Mais puisque E_n est fermé, on aurait $0\in E_n$ ce qui n'est pas le cas.

Applications linéaires continues

Exercice 24 - - *L2/Math Spé* - ⋆

1. D'après la formule fondamentale du calcul intégrale :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt.$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit, pour x dans $[0,1]$:

$$|f(x)| \leq x \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \leq N_2(f).$$

On passe au sup en x :

$$N_1(f) \leq N_2(f).$$

Ceci se réécrit en :

$$N_1(Id(f)) \leq N_2(f).$$

Ceci prouve bien, par le théorème classique, que Id est continu (car elle est continue en 0).

2. Il est facile de vérifier que :

$$N_1(f_n) = 1/n,\ N_2(f_n) = 1.$$

C'est l'application était continue, on aurait l'existence d'une constante C telle que :

$$N_2(Id(f_n)) = N_2(f_n) \leq CN_1(f_n) \implies 1 \leq \frac{C}{n}.$$

C'est bien sûr impossible si n est assez grand. Cet exercice montre en particulier que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 25 - **Sont-elles continues ?** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Puisque g est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée (et atteint ses bornes). Posons $M = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$. Alors on a

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(t)g(t)|dt \leq M \int_0^1 |f(t)|dt \leq M\|f\|_1.$$

Ceci prouve que T est continue.

2. Supposons que T est continue. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a $\|TP\| \leq C\|P\|$. Soit $n \geq 0$. Pour $P = X^n$, on trouve

$$TP = nX^{n-1},\ \text{d'où } n = \|TP\| \leq C\|P\| = C.$$

Ceci est impossible car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Donc T n'est pas continue.

3. On peut utiliser deux arguments différents. On peut d'une part remarquer que E est un espace vectoriel de dimension finie, que toute application linéaire entre espaces de dimension finie est continue. On peut aussi utiliser un calcul direct. En effet, soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned}\|TP\| &= \left\|\sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}\right\| \\ &= \sum_{k=1}^n k|a_k| \\ &\leq n\sum_{k=1}^n |a_k| \leq n\|P\|.\end{aligned}$$

Puisque n ne dépend pas de P (ceci ne dépend que de E), on obtient que T est continue.

4. On va prouver que T est continue par un calcul direct. Prenons en effet $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ (la somme est en fait finie). Alors on a :

$$\begin{aligned}\|TP\| &= \left\|\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}X^k\right\| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)k!|a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)!|a_{k+1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k!|a_k| \\ &\leq \|P\|.\end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité de P.

5. On prouve que T est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Tf\| = \int_0^1 |f(t)||g(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} = C\|f\|_2,$$

avec

$$C = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

C est bien un réel fini, car g est continue sur $[0,1]$, donc bornée, et on a $C \leq \|g\|_\infty$.

Exercice 26 - Applications linéaires sur les polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Supposons ϕ continue. Alors il existe $C \geq 1$ tel que

$$\|\phi(P)\| \leq C\|P\|$$

pour tout polynôme P. Prenons le polynôme $P(X) = X^n$. Alors $\|P\| = 1$. Mais $P(X+1) = (X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \dots$. Ainsi, on obtient

$$n \leq \|P(X+1)\| \leq C,$$

ce qui impossible si on choisit n assez grand. Ainsi, ϕ n'est pas continue.

2. Écrivons $A(X)=\sum_{j=0}^p b_jX^j$ et $P(X)=\sum_{i=0}^n a_iX^i$. Alors $AP(X)=\sum_{k=0}^{n+p}c_kX^k$ avec
$$c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j.$$
Notons $M=\max_{j=0,\dots p}|b_j|$. On a donc
$$|c_k|\leq M\sum_{i=\max(0,k-p)}^{k}|a_i|,$$
ce qui entraîne
$$\|AP\|_1\leq M\sum_{k=0}^{n+p}\sum_{i=\max(0,k-p)}^{k}|a_i|.$$
Fixons i_0 dans $\{0,\dots,n\}$. S'il apparait dans la somme $\sum_{i=\max(k-p,0)}^k|a_i|$, c'est que $k-p\leq i_0\leq k$. En particulier, il apparait au plus $k-(k-p)+1=(p+1)$ fois. On en déduit que
$$\|AP\|_1\leq M(p+1)\|P\|_1,$$
ce qui prouve que ψ est continue.

Exercice 27 - - *L2/Math Spé* - ⋆

1. ϕ est clairement une application linéaire, et il faut juste rappeler que $\phi(f)$, comme primitive d'une fonction continue, est elle-même continue (donc C^1).
2. On a
$$|\phi(f)(x)|\leq\int_0^x|f(t)|dt\leq\int_0^1|f(t)|dt\leq\|f\|_1.$$
On en déduit que
$$\|\phi(f)\|_1\leq\int_0^1\|f\|_1dt\leq\|f\|_1.$$
Ainsi, ϕ est continue.
3. On a $\phi(f_n)(x)=\int_0^x ne^{-nt}dt=1-e^{-nx}$. En particulier, $\|f_n\|_1=\phi(f_n)(1)=1-e^{-n}$. De plus,
$$\|\phi(f_n)\|_1=\int_0^1(1-e^{-nx})dx=1-\frac{1-e^{-n}}{n}.$$
4. D'après la question 2, pour tout $f\in E$,
$$\|\phi(f)\|_1\leq\|f\|_1,$$
et donc $|||\phi|||\leq 1$. De plus, on a
$$\|\phi(f_n)\|_1\leq|||\phi|||\|f_n\|_1\implies 1-e^{-n}\leq\left(1-\frac{1-e^{-n}}{n}\right)|||\phi|||.$$
Passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $|||\phi|||\geq 1$, ce qui prouve finalement que $|||\phi|||=1$.

Exercice 28 - Formes linéaires sur les polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆

Supposons d'abord que $|c|<1$. Alors, pour $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$,

$$|\phi_c(P)|=\left|\sum_{k=0}^n a_kc^k\right|\leq\sum_{k=0}^n|a_k||c|^k\leq\|P\|_\infty\frac{1-|c|^{n+1}}{1-|c|}.$$

Puisque $|c|<1$, on en déduit que

$$|\phi_c(P)|\leq\|P\|\frac{1}{1-|c|}$$

donc ϕ_c est continue et $\|\phi_c\|\leq\frac{1}{1-|c|}$. On va prouver que cette dernière inégalité est en fait une égalité. D'abord, si $c\geq 0$, on considère le polynôme $P_n(X)=1+X+\dots+X^n$. Alors

$$\phi_c(P_n)=1+c+\dots+c^n=\frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

Mais $\|P_n\|=1$, et donc on obtient

$$\frac{1-c^{n+1}}{1-c}=\|\phi_c(P_n)\|\leq\|\phi_c\|\|P_n\|=\|\phi_c\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que $\|\phi_c\|\geq\frac{1}{1-c}$, ce qui donne l'autre inégalité. Si maintenant $c<0$, on effectue le même travail avec le polynôme $Q(X)=1-X+X^2+\dots+(-1)^nX^n$. Pour $c\geq 1$, on a $\phi_c(P_n)=1+c+\dots+c^n\geq n+1$ alors que $\|P_n\|=1$. L'application ϕ_c ne peut pas être continue. On a le même résultat si $c\leq -1$, en considérant cette fois Q_n.

Exercice 29 - Jamais continue - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Pour $a\in\mathbb{R}$, la fonction $f_a(x)=e^{ax}$ est dans E, et elle vérifie $Df_a=af_a$. Or, si D était continue pour la norme N, il existerait une constante $C>0$ telle que

$$N(D(f_a))\leq CN(f_a)$$

pour tout $a\in\mathbb{R}$. On obtiendrait alors que, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$|a|N(f_a)\leq CN(f_a)\implies|a|\leq C.$$

C'est bien sûr impossible, et D n'est pas continue sur (E,N).

Exercice 30 - Opérateurs positifs - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Remarquons que $|f|\geq f$, et donc $|f|-f\geq 0$. On en déduit que $u(|f|)\geq u(f)$. De même, on a $|f|\geq -f$, soit $|f|+f\geq 0$ et donc $u(|f|)\geq u(-f)=-u(f)$. Finalement, on obtient bien que $|u(f)|\leq u(|f|)$.
2. On sait que $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$, ce qui s'écrit encore $\|f\|_\infty e-|f|\geq 0$. Ainsi, on a

$$|u(f)|\leq u(|f|)\leq u(\|f\|_\infty e)\leq u(e)\|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que u est continue, avec $\|u\|\leq u(e)$. De plus, pour $f=e$, on a exactement $u(f)=u(e)\|e\|_\infty$, ce qui prouve qu'en réalité $\|u\|=u(e)$.