Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 (« Analyse Hilbertienne »)
EXAMEN DU 29 MARS 2007
durée : 2 heures ; ni documents ni calculatrices

Les trois exercices sont mutuellement indépendants.

(5 pts) **A.** On rappelle que $D_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$.

1. Donner trois formules correspondant au noyau de Fejér $F_n(t)$: expression avec les $D_k(t)$, expression avec les $\cos(kt)$, expression explicite montrant $F_n(t) \geq 0$. Justifier $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$.
2. On définit une fonction g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ \frac{x^2}{\sin^2(x)} & (0 < x \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} < x) \end{cases}$.

   Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq g(x) \leq C$.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1 \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} g\left(\frac{x}{n}\right) dx = \frac{\pi}{2}$$
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

(8 pts) **B.** Dans cet exercice on a au départ un paramètre a, $0 < a \leq \pi$. On lui associe la fonction 2π-périodique, définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 1 & (0 < x < a) \\ 0 & (a \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

1. Prouver $c_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(na/2)}{n} e^{-ina/2}$ pour $n \neq 0$. Que vaut $c_0(f)$?
2. Que vaut $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(0)$? En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$ (pour $0 < a \leq \pi$).
3. On revient à f. En calculant $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2$ établir pour $0 < a \leq \pi$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{a(2\pi - a)}{4}$$
   Montrer que cette formule vaut pour $0 \leq a \leq 2\pi$.
4. En déduire en le justifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a(2\pi - a)}{4}\,da = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Déterminer ensuite la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

TOURNEZ LA PAGE

(7 pts) **C.**

1. Rappelez la formule donnant $c_n(f * g)$ lorsque les coefficients de Fourier de f et de g sont connus.
2. On pose pour $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$:

$$K_N(x) = 1 + \sum_{1 \leq k \leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^2 2\cos(kx)$$

   En utilisant la question précédente trouver une autre expression de K_N et prouver alors $\forall x \in \mathbf{R} \quad K_N(x) \geq 0$.

3. Soit $\delta > 0$, $\delta \leq \frac{1}{2}\pi$. On rappelle que $F_N(t) \leq \frac{1}{N \sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$ lorsque $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$. Montrer :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \ \forall x \in [2\delta, 2\pi - 2\delta] \qquad F_N(t)F_N(x-t) \leq \frac{1}{N \sin^2(\frac{1}{2}\delta)}(F_N(t) + F_N(x-t))$$

4. En déduire $2\delta \leq x \leq 2\pi - 2\delta \implies 0 \leq K_N(x) \leq \dfrac{2}{N \sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$.
5. Prouver alors que $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'identité.
6. Question bonus : montrer $0 < K_N(x) < N$ pour tout x et $N \geq 2$.