Université Rennes I Année 2008-2009

L3 **TOPM**

Examen de seconde session

Le 23/06/2009 - Durée: 2h

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Rappeler la définition de ce qu'est un *ouvert* et un *fermé*.

Exercice 1 On se place dans $\mathbb{R}$. Etant donné $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$d_1(x,y) := |x^2 - y^2|\,, \qquad d_2(x,y) := \min\big(1; |x-y|\big) \equiv \varphi(|x-y|)\,, \qquad \varphi(u) := \min\,(1;u)\,.$$

1.1. La fonction d_1 est-elle une distance (justifier la réponse) ?

1.2. Etablir l'inégalité :

$$\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)\,, \qquad \forall\,(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2\,.$$

1.3. La fonction d_2 est-elle une distance (justifier la réponse) ?

Exercice 2 On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme Euclidienne.

2.1. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère les ensembles :

$$A_1 := \Big\{\big(\cos\big(\tfrac{2\,\Pi\,n}{p}\big), \sin\big(\tfrac{2\,\Pi\,n}{p}\big)\big)\,;\, n \in \mathbb{N}^*\Big\}, \qquad A_2 := \big\{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\big\}, \qquad A_3 := \big\{(x,y)\,;\, y < x^2\big\}\,.$$

Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2 et A_3 ceux qui sont ouverts (justifier les réponses).

2.2. On considère les ensembles :

$$A_4 := \big\{\,(x,y)\,;\, e^x\,y \geqslant 1\,\big\}\,, \qquad A_5 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \big\{\,(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \leqslant 1 - \frac{1}{n}\,\big\}\,.$$

Déterminer parmi les ensembles A_4 et A_5 ceux qui sont fermés (justifier les réponses).

2.3. Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 ceux qui sont connexes (on ne demande pas de justifier les réponses).

Exercice 3 On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme Euclidienne. On considère une *bijection continue* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \|\, f(x)\,\| = +\infty$. Autrement dit :

$$\forall\, M \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad \exists\, R \in \mathbb{R}_+^*\,; \qquad R \leqslant \|\,x\,\| \implies M \leqslant \|\,f(x)\,\|\,.$$

3.1. Le choix de la norme Euclidienne (plutôt qu'une autre norme sur $\mathbb{R}^n$) a-t'il une influence sur la continuité de la fonction f ?

3.2. Soit $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. On note $x_j := f^{-1}(y_j)$ l'image réciproque par f de y_j. Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est bornée.

3.3. Expliquer pourquoi il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante ajustée de façon à ce que la suite $(x_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$.

3.4. Traduire en terme de sous-suites extraites l'affirmation suivante : *"La suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x dans $\mathbb{R}^n$."*

3.5. Déduire de ce qui précède que la fonction f est un homéomorphisme.

Exercice 4 Soit $E \equiv \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n (avec $n \geqslant 1$) et à coefficients réels. Ainsi

$$E := \Big\{ P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j \ X^j \, ; \ a_j \in \mathbb{R} \, , \ j \in \{0, \cdots, n\} \Big\} .$$

On munit E d'une norme notée $\| \ \|$.

4.1. Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ?

4.2. Expliquer pourquoi l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(0) \end{array}$$

est une application <u>linéaire</u> continue (on dit aussi une *forme linéaire continue*).

4.3. Rappeler la définition de ce qu'est la *norme* d'une application linéaire continue. On note $K \equiv \|L\| \in \mathbb{R}_+$ la norme de l'application linéaire continue L. Expliquer pourquoi $K \in \mathbb{R}_+^*$.

4.4. Dans E, on distingue l'ensemble suivant $\mathcal{A} := \big\{ \, P \in E \, ; \ P(0) = 1 \, \big\}$. Etablir l'identité

$$K^{-1} \ = \ \inf_{P\in\mathcal{A}} \ \| \ P \ \| \ .$$

4.5. Dans E, on distingue le sous-espace vectoriel F formé des polynômes P tels que $P(0) = 0$. Etablir l'identité

$$K^{-1} \ = \ d(\mathbb{I}, F) \ \equiv \ \inf_{P\in F} \ \| \ P - \mathbb{I} \ \|$$

où la lettre $\mathbb{I}$ désigne le polynôme constant égal à 1 ($a_0 = 1$ et les autres a_j sont nuls).

4.5. Application. On prend $n = 1$ et on effectue le choix suivant de norme sur $E \equiv \mathbb{R}_1[X]$:

$$\| \ P \ \| := \Big(\int_0^1 \ |P(t)|^2 \ dt \Big)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Calculer dans ce contexte ce que vaut la constante K.