Exercices de 4ème – Chapitre 7 – Calcul littéral

Énoncés

Exercice 1

Compléter le tableau suivant sans calculatrice.

	$a = 2$	$a = \frac{3}{4}$	$a = -5$
$20a - 3$			
$1 - 7a^2$			
$4a^3$			
$-(8a - 1)(4 - a)$			

Exercice 2 *Le problème de Léo Moser*

Soit n un nombre entier positif différent de 0. On pose $A = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$ et $B = 2^{(n-1)}$

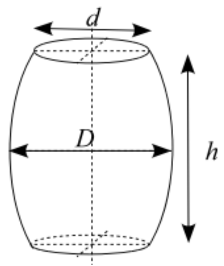
1. Calculer A et B pour $n = 1$.

2. **a]** Comparer A et B pour $n = 2$.
b] Quelle conjecture peut-on faire ?

3. **a]** Comparer A et B pour $n = 3$.
b] Quelle conjecture peut-on faire ?

4. **a]** Comparer A et B pour $n = 10$.
b] Que peut-on conclure ?

Exercice 3



Le volume d'un tonneau est donné par la formule $V = \frac{h\pi}{12}(2D^2 + d^2)$

1. Pour quelle(s) unité(s) de volume la formule est-elle valable ?

2. Une barrique de type bordelaise a pour dimensions : $h = 1$ m ; $d = 56$ cm et $D = 7$ dm.
Son volume dépasse-t-il 250 L ?

Exercice 4

Réduire au maximum les expressions suivantes.

$A = 5x - 4 + 7x - 8x + 6$
$B = -4y + 5 - 2y^2 + y - 8y^2 - 3y - 11$

$C = -3x + 5 - 7x + 2x - 6x - 6$
$D = 4x - 5 + 6x^2 + 4 - 2x^2 - x + x^2 - 7x$

Exercice 5

Développer et réduire les expressions suivantes.

$E = -5x - 3(-5x^2 + x - 1)$
$F = -4x^2 - (2x^2 - 3x + 1) + x(-2x + 3)$

$G = 6 + (5y - 2)(3 - 4y)$
$H = 5z - 3(4z + 3)(-2z - 5)$

Exercice 6

Soit $I = 4x^2 - (x + 3)(x - 2) + 2(x - 2)$.

1. Développe puis réduis l'expression I.

2. Calcule I lorsque $x = -5$ puis lorsque $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 7

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 25m - 15$

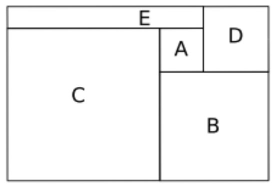
$B = 16y - 4$

$C = 4a + 3a^2$

$D = 15x^2 + 33x$

Exercice 8

Le rectangle ci-contre est composé des carrés A, B, C et D, ainsi que du rectangle E.



1. Lorsque le côté du carré A est 2 cm et celui du carré B est 5 cm, quelle est l'aire du rectangle E ?

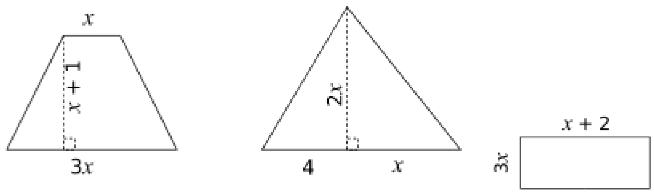
2. On appelle a le côté du carré A et b le côté du carré B.
Exprimer les dimensions des carrés C et D, et du rectangle E en fonction de a et de b.

3. Exprimer l'aire du rectangle E en fonction de a et de b.
Donner la réponse sous forme d'une expression développée et réduite.

4. Exprimer l'aire du grand rectangle en fonction de a et de b.

Exercice 9

Voici trois figures dont les dimensions sont données.



1. Exprimer l'aire de chacune figure en fonction de x.

2. Montrer que la somme des aires de ces trois figures est la même que l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés mesure $3x$.

Exercice 10

On pose $A = n(n + 2) - n^2$

1. Développer et réduire A.

2. En déduire sans calculatrice le résultat de : $12341234 \times 12341236 - 12341234^2$

Exercice 11

Relier chaque nombre à l'équation ou aux équations dont il est la solution.

- -3
- 2
- 1
- -2

- $x + 7 = 5$
- $x - 8 = -6$
- $4x = -12$
- $x + 6 = 7$
- $\frac{x}{3} = -1$
- $-2x - 4 = 0$

Exercice 12

Déterminer si le nombre $\frac{2}{3}$ est solution de l'équation $7x - 5 = 4x - 3$.

Exercice 13

Lilwenn a résolu l'équation $3x - 5 = x + 7$.

Décrire chaque étape de son raisonnement :

$$3x - 5 - x = x + 7 - x$$
$$2x - 5 = 7$$
$$2x - 5 + 5 = 7 + 5$$
$$2x = 12$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes.

a] $5x - 2 = -7$

b] $-8x + 3 = 5x - 2$

c] $\frac{3x}{8} + 5 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

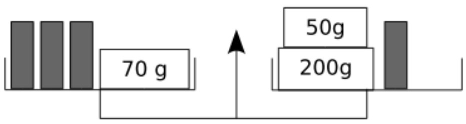
d] $\frac{2}{5} - \frac{x}{3} = 4x - \frac{1}{15}$

e] $2(x + 3) - (2x - 7) = 12$

f] $5x + 3(8 - 2x) = 15 - (x - 9)$

Exercice 15

La balance ci-contre contient des tubes de masse indéterminée et est en équilibre.



1. Écrire une équation décrivant la situation.

2. Déterminer la masse d'un tube.

Exercice 16

1. Dans un sac de 250 billes rouges et noires, il y a 18 billes rouges de plus que de billes noires.
Quel est le nombre de billes de chaque couleur ?

2. Reprendre ce problème en considérant qu'il y a maintenant 115 billes au total au lieu de 250.

Exercice 17

Natelia a 30 ans de plus que son fils. Dans cinq ans, Natelia aura le double de l'âge de son fils.
En utilisant le tableau suivant, déterminer l'âge de Natelia et de son fils.

	Natelia	Fils de Natelia
L'âge actuel		
L'âge dans cinq ans		

Exercice 18

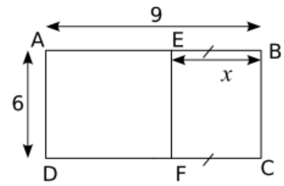
Si on ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{4}{5}$ on obtient la fraction $\frac{3}{2}$. Quel est ce nombre ?

Exercice 19

On a deux nombres x et y tels que $\frac{5-3x}{2} \leq \frac{5-3y}{2}$. Comparer x et y.

Exercice 20

On considère le schéma ci-contre.



1. Encadrer x.
2. Exprimer le périmètre P du rectangle $AEFD$ et en déterminer un encadrement.

Corrigés

Exercice 1

	$a = 2$	$a = \frac{3}{4}$	$a = -5$
$20a - 3$	**37**	**12**	**-103**
$1 - 7a^2$	**-27**	$-\frac{47}{16}$	**-174**
$4a^3$	**32**	$\frac{27}{16}$	**-500**
$-(8a - 1)(4 - a)$	**- 30**	$-\frac{65}{4}$	**369**

Exercice 2 *Le problème de Léo Moser*

1. Pour $n = 1$ on a : $A=\frac{1^4-6\times1^3+23\times1^2-18\times1+24}{24}$ et $B=2^{(1-1)}$

$A=\frac{1-6+23-18+24}{24}$ et $B=2^0$

$\boldsymbol{A = 1}$ et $\boldsymbol{B = 1}$

2. **a]** Pour $n = 2$ on a : $A=\frac{2^4-6\times2^3+23\times2^2-18\times2+24}{24}$ et $B=2^{(2-1)}$

$A=\frac{16-48+92-36+24}{24}$ et $B=2^1$

$\boldsymbol{A = 2}$ et $\boldsymbol{B = 2}$

b] On peut conjecturer que, pour tout nombre entier n positif différent de 0 on $\boldsymbol{A = n}$ et $\boldsymbol{B = n}$.

3. **a]** Pour $n = 3$ on a : $A=\frac{3^4-6\times3^3+23\times3^2-18\times3+24}{24}$ et $B=2^{(3-1)}$

$A=\frac{81-162+207-54+24}{24}$ et $B=2^2$

$\boldsymbol{A = 4}$ et $\boldsymbol{B = 4}$

b] Le résultat précédent montre que la conjecture du **2b]** est fausse.
On peut toutefois encore conjecturer que, pour tout nombre entier n positif différent de 0 on $\boldsymbol{A = B}$.

4. **a]** Pour $n = 10$ on a : $A=\frac{10^4-6\times10^3+23\times10^2-18\times10+24}{24}$ et $B=2^{(10-1)}$

$A=\frac{10000-6000+2300-180+24}{24}$ et $B=2^9$

$\boldsymbol{A = 256}$ et $\boldsymbol{B = 512}$

b] On peut conclure de ce dernier résultat que toutes les conjectures précédentes étaient fausses.

Exercice 3

1. La formule demeure valable quelle que soit l'unité de volume choisie, à condition qu'elle soit la même pour h, d et D.
2. Commençons par exprimer les dimensions données dans la même unité : $h = 10$ dm ; $d = 5,6$ dm et $D = 7$ dm.

   Le volume de la barrique bordelaise est : $V=\frac{10\pi}{12}(2\times7^2+5,6^2)$ donc $\boldsymbol{V = 107{,}8\pi}$ **dm³**.

   Comme le volume de la barrique bordelaise vaut environ 339 dm³ soit 339 L alors **il dépasse 250 L**.

Exercice 4

$A = 4x + 2$

$B = -10y^2 - 6y - 6$

$C = -14x - 1$

$D = 5x^2 - 4x - 1$.

Exercice 5

$E = -5x + 15x^2 - 3x + 3$
$\boldsymbol{E = 15x^2 - 8x + 3}$

$F = -4x^2 - 2x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 3x$
$\boldsymbol{F = -8x^2 + 6x - 1}$

$G = 6 + 15y - 20y^2 - 6 + 8y$
$\boldsymbol{G = -20y^2 + 23y}$

$H = 5z - 3(-8z^2 - 20z - 6z - 15)$
$H = 5z + 24z^2 + 78z + 45$
$\boldsymbol{H = 24z^2 + 83z + 45}$

Exercice 6

1. On a $I = 4x^2 - (x^2 - 2x + 3x - 6) + 2x - 4$
$= 4x^2 - x^2 + 2x - 3x + 6 + 2x - 4$
$\boldsymbol{I = 3x^2 + x + 2}$

2. Pour $x = -5$ on a : $I = 3\times(-5)^2 + (-5) + 2$ donc $I = 3\times 25 - 5 + 2$ soit $\boldsymbol{I = 72}$.
Pour $x = \frac{1}{2}$ on a : $I = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2$ donc $I = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{8}{4}$ soit $\boldsymbol{I = \frac{13}{4}}$.

Exercice 7

$\boldsymbol{A = 5(5m - 3)}$
$\boldsymbol{B = 4(4y - 1)}$

$\boldsymbol{C = a(4 + 3a)}$
$\boldsymbol{D = 3x(5x + 11)}$

Exercice 8

1. Le côté du carré C vaut $5 + 2 = 7$ cm.
La longueur du rectangle E vaut $7 + 2 = 9$ cm.
Le côté du carré D vaut $5 - 2 = 3$ cm.
La largeur du rectangle E vaut $3 - 2 = 1$ cm.
Par conséquent l'aire du rectangle E vaut $1\times 9 =$ **9 cm²**.

2. Le côté du carré C vaut $\boldsymbol{c = a + b}$ **cm**.
La longueur du rectangle E vaut $e_L = c + a$ soit $\boldsymbol{e_L = 2a + b}$ **cm**.
Le côté du carré D vaut $\boldsymbol{d = b - a}$ **cm**.
La largeur du rectangle E vaut $e_l = d - a$ soit $\boldsymbol{e_l = b - 2a}$ **cm**.

3. L'aire du rectangle E vaut $e_L\times e_l = (2a + b)\times(b - 2a)$
$= 2ab - 4a^2 + b^2 - 2ab$
$= \boldsymbol{b^2 - 4a^2}$ **cm²**.

4. Le grand rectangle a pour longueur $e_l + d = 2a + b + b - a$ soit $a + 2b$ cm.
Il a pour largeur $e_l + c = b - 2a + a + b$ soit $2b - a$ cm.
Son aire vaut donc $(a + 2b)\times(2b - a) = 2ab - a^2 + 4b^2 - 2ab$
$= \boldsymbol{4b^2 - a^2}$ **cm²**.

Exercice 9

1.

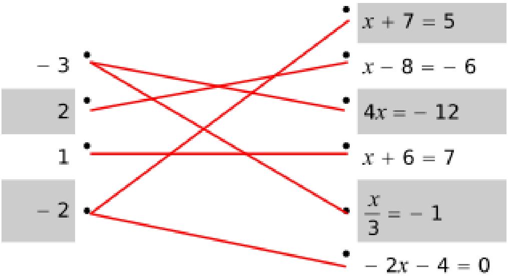
- L'aire du trapèze vaut $\frac{\text{somme des bases}\times\text{hauteur}}{2}$ soit $\frac{(3x+x)\times(x+1)}{2} = \frac{4x\times(x+1)}{2}$ ou encore $\boldsymbol{2x(x + 1)}$.
- L'aire du triangle vaut $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$ soit $\frac{(4+x)\times 2x}{2}$ ou encore $\boldsymbol{x(x + 4)}$.
- L'aire du rectangle vaut $\text{largeur}\times\text{longueur}$ soit $\boldsymbol{3x(x + 2)}$.

2. La somme des aires de ces trois figures vaut $2x(x + 1) + x(x + 4) + 3x(x + 2) = 2x^2 + 2x + x^2 + 4x + 3x^2 + 6x$ soit $\boldsymbol{6x^2 + 12x}$.
En factorisant cette expression par $3x$ on voit qu'elle est égale $3x(2x + 4)$.
Par conséquent, la somme des aires des trois figures est la même que l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent $\boldsymbol{3x}$ et $\boldsymbol{2x + 4}$.

Exercice 10

1. On a $A = n^2 + 2n - n^2$ donc $\boldsymbol{A = 2n}$.
2. On remarque que le calcul demandé revient à calculer A avec $n = 12341234$. D'après **1.** le résultat est donc $2n =$ **24682468**.

Exercice 11



Exercice 12

Pour $x=\frac{2}{3}$ on a $7x-5=7\times\frac{2}{3}-5$ donc $7x-5=\frac{14}{3}-\frac{15}{3}$ soit $7x-5=-\frac{1}{3}$.

Pour $x=\frac{2}{3}$ on a $4x-3=4\times\frac{2}{3}-3$ donc $4x-3=\frac{8}{3}-\frac{9}{3}$ d'où $4x-3=-\frac{1}{3}$.

Par conséquent $\frac{2}{3}$ **est solution** de l'équation $7x - 5 = 4x - 3$.

Exercice 13

	$3x - 5 = x + 7$
On retire x à gauche et à droite :	$3x - 5 - x = x + 7 - x$
On réduit chaque expression :	$2x - 5 = 7$
On ajoute 5 à gauche et à droite :	$2x - 5 + 5 = 7 + 5$
On réduit chaque expression :	$2x = 12$
On divise par 2 à gauche et à droite :	$\frac{2x}{2}=\frac{12}{2}$
On simplifie chaque fraction :	$x = 6$

Exercice 14

a] $5x = -5$

$x=\frac{-5}{5}$

La solution de l'équation est **(-1)**.

b] $-13x + 3 = -2$

$-13x = -5$

$x=\frac{-5}{-13}$

La solution de l'équation est $\boldsymbol{\frac{5}{13}}$.

c] $3x + 8\times5 = 2x + 4$

$x + 40 = 4$

$x = -36$

La solution de l'équation est **(-36)**.

d] $3\times2 - 5x = 60x - 1$

$6 - 65x = -1$

$-65x = -7$

$x=\frac{-7}{-65}$

La solution de l'équation est $\boldsymbol{\frac{7}{65}}$.

e] $2x + 6 - 2x + 7 = 12$

$13 = 12$ Impossible !

L'équation n'a **aucune solution**.

f] $5x + 24 - 6x = 15 - x + 9$

$24 - x = 24 - x$ Toujours vrai.

Tous les nombres sont solutions de l'équation.

Exercice 15

1. Soit x la masse d'un tube en grammes. L'équilibre de la balance se traduit par l'équation suivante : $\mathbf{3x + 70 = 200 + 50 + x}$.

2. Résolvons l'équation : $3x + 70 = 250 + x$

$2x = 180$

$x = 90$ La masse d'un tube est **90g**.

Exercice 16

1. Soit x le nombre de billes noires. Le sac contient donc $(x + 18)$ billes rouges et comme il contient, en tout, 250 billes, alors on a :

$x + (x + 18) = 250$

$2x + 18 = 250$

$2x = 232$

$x = 116$ Il y a donc **116 billes noires** et $116 + 18 =$ **134 billes rouges** dans le sac.

2. Avec 115 billes au total au lieu de 250 l'équation devient : $x + (x + 18) = 115$ puis $2x + 18 = 115$ soit $2x = 97$ donc $x = 48{,}5$.
Comme le nombre de billes noires est un entier, alors **le problème n'a pas de solution**, même si l'équation en a une.

Exercice 17

On appelle x l'âge actuel de Natelia.

Cela nous permet de remplir le tableau de la manière ci-contre.

	Natelia	Fils de Natelia
L'âge actuel	x	$x - 30$
L'âge dans cinq ans	$x + 5$	$(x - 30) + 5$

Le problème se traduit par l'équation suivante, que l'on résout :

$x + 5 = 2[(x - 30) + 5]$

$x + 5 = 2(x - 25)$

$x + 5 = 2x - 50$

$5 = x - 50$

$55 = x$ Natelia a **55 ans** et son fils a $55 - 30 =$ **25 ans**.

Exercice 18

Soit x le nombre qu'on ajoute au numérateur et au dénominateur de $\frac{4}{5}$ pour obtenir $\frac{3}{2}$. On obtient l'équation $\frac{4+x}{5+x}=\frac{3}{2}$ ou encore : $2(4 + x) = 3(5 + x)$ ou encore $8 + 2x = 15 + 3x$ et enfin $x = -7$. Le nombre cherché est donc **(-7)**.

On peut vérifier qu'en effet on a $\frac{4+(-7)}{5+(-7)}=\frac{-3}{-2}$ donc $\frac{4+(-7)}{5+(-7)}=\frac{3}{2}$.

Exercice 19

On multiplie par 2 l'inégalité $\frac{5-3x}{2}\leq\frac{5-3y}{2}$ pour obtenir $5 - 3x \leq 5 - 3y$ puis on lui ôte 5 et on a : $-3x \leq -3y$.
Enfin, en divisant par (-3) l'inégalité, elle change de sens et on obtient : $\boldsymbol{x \geq y}$.

Exercice 20

1. On a $\mathbf{0 < x < 9}$.

2. Le périmètre du rectangle $AEFD$ est $2(AE + EF) = 2(9 - x + 6)$ donc $\boldsymbol{P = 2(15 - x)}$.
On part de l'encadrement $0 < x < 9$
On le multiplie par (-1) : $0 > -x > -9$
On lui ajoute 15 : $15 > 15 - x > 6$
On le multiplie par 2 : $30 > 2(15 - x) > 12$
Le périmètre du rectangle $AEFD$ vérifie l'encadrement : $\boldsymbol{30 > P > 12}$.