Université Louis Pasteur
U.F.R. de Mathématiques et d'Informatique

Année 2007 - 2008

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Calcul différentiel

Janvier 2008

Corrigé de l'examen

Exercice 1

Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$.

(a) La matrice jacobienne $\mathcal{J}_f(x_0, y_0)$ de f en (x_0, y_0) est

$$(6x_0^5y_0^2 - 5x_0^4y_0^3, 2x_0^6y_0 - 3x_0^5y_0^2).$$

(b) La matrice hessienne $\mathcal{H}_f(x_0, y_0)$ de f en (x_0, y_0) est

$$\begin{pmatrix} 30x_0^4y_0^2 - 20x_0^3y_0^3 & 12x_0^5y_0 - 15x_0^4y_0^2 \\ 12x_0^5y_0 - 15x_0^4y_0^2 & 2x_0^6 - 6x_0^5y_0 \end{pmatrix}.$$

(c) On a $\mathcal{J}_f(3, -2) = (9072, -5832)$. Donc,

$$f'(a)(h) = (9072, -5832)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 9072h_1 - 5832h_2$$

pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\mathcal{H}_f(3, -2) = \begin{pmatrix} 14040 & -10692 \\ -10692 & 4374 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f''(a)(h, k) &= (k_1, k_2)\begin{pmatrix} 14040 & -10692 \\ -10692 & 4374 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= 14040h_1k_1 - 10692(h_1k_2 + h_2k_1) + 4374h_2k_2 \end{aligned}$$

pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et tout $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

(a) Posons $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω (comme quotient de deux fonctions polynomiales). En particulier, f admet des dérivées partielles par rapport à F et G en tout point de Ω.

Il nous reste à montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à F et G en $(0, 0, 0)$. Pour tout nombre réel t, on a

$$f(t, 0, 0) - f(0, 0, 0) = 0.$$

Donc, f admet une dérivée partielle par rapport à F en $(0,0,0)$, et

$$f'_F(0,0,0) : F \to \mathbb{R}$$

est l'application nulle.

Ensuite, pour tous nombres réels t_1 et t_2, on a

$$f(t_1,t_2,0) - f(0,0,0) = 0.$$

Donc, f admet une dérivée partielle par rapport à G en $(0,0,0)$, et

$$f'_G(0,0,0) : G \to \mathbb{R}$$

est l'application nulle.

(b) Montrons que la dérivée partielle $f'_F : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$ de f par rapport à F n'est pas continue en $(0,0,0)$. L'application $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ coïncide avec l'application composée $L \circ f'_F$, où $L : \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est l'application associant à toute forme linéaire $l \in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$ la valeur $l(1,0,0)$ de l en $(1,0,0)$. L'application L est continue. Donc, pour montrer que f'_F n'est pas continue en $(0,0,0)$, il est suffisant de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0,0)$.

Considérons un point (x_0,y_0,z_0) de $\mathbb{R}^3$ et supposons que ce point soit différent du point $(0,0,0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^2} y_0 z_0 (y_0^2+z_0^2-x_0^2).$$

Donc, pour tout nombre réel non nul t, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t,t) = \frac{t^4}{9t^4} = 1/9.$$

De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0.$$

Donc, l'application $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0,0,0)$. Par conséquent, la dérivée partielle f'_F de f par rapport à F n'est pas continue en $(0,0,0)$.

(c) Supposons que l'application f soit différentiable en $(0,0,0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0.$$

De façon similaire,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0.$$

Donc, l'application linéaire $f'(0,0,0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'application nulle. D'autre part, pour tout point (t_1, t_2, t_3) de $\mathbb{R}^3$ tel que $(t_1, t_2, t_3) \neq (0,0,0)$, on a

$$f(t_1, t_2, t_3) - f(0,0,0) = \frac{t_1 t_2 t_3}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}.$$

Donc, pour tout nombre réel strictement positif t, on a

$$f(t,t,t) - f(0,0,0) = \frac{t^3}{3t^2} = \frac{t}{3}.$$

Mais

$$\frac{1}{||(t,t,t)||_2} \cdot \frac{t}{3}$$

ne tend pas vers 0 quand t tend vers 0, car

$$\frac{1}{||(t,t,t)||_2} \cdot \frac{t}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Cette contradiction montre que l'application f n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.

Exercice 3

(a) L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être identifié avec $\mathbb{R}^{n^2}$: à une matrice quelconque A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe le point de $\mathbb{R}^{n^2}$ dont les coordonnées coïncident avec les coefficients de A considérés dans un ordre choisi (on choisit le même ordre pour toutes les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Les n^2 composantes de g, vue comme application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$, sont des applications polynomiales. Donc, g est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} g(A+H) - g(A) &= (A+H)^3 - A^3 \\ &= AAH + AHA + HAA + AHH + HAH + HHA + HHH. \end{aligned}$$

Considérons l'application $L_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$L_A(H) = A^2H + AHA + HA^2$$

pour toute matrice H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application L_A est linéaire et

$$g(A+H) - g(A) = L_A(H) + AH^2 + HAH + H^2A + H^3.$$

pour toute matrice H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérons l'application $\varepsilon_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\varepsilon_A(H) = \frac{AH^2 + HAH + H^2A + H^3}{\|H\|}$$

si H est non nulle, et $\varepsilon_A(H)$ soit la matrice nulle si H est la matrice nulle. Pour toute matrice non nulle H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_A(H)\| &= \frac{\|AH^2 + HAH + H^2A + H^3\|}{\|H\|} \\ &\leq 3\|A\|\|H\| + \|H\|^2,\end{aligned}$$

et $3\|A\|\|H\| + \|H\|^2$ tend vers 0 quand H tend vers la matrice nulle.

Par conséquent, pour toute matrice H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$g(A+H) - g(A) = L_A(H) + \|H\|\varepsilon_A(H),$$

et $\|\varepsilon_A(H)\|$ tend vers 0 quand H tend vers la matrice nulle. Donc, l'application $L_A : H \mapsto A^2H + AHA + HA^2$ est la dérivée de g en A. On obtient que la dérivée de g est l'application

$$\begin{aligned} g' : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ g' : A &\mapsto L_A, \end{aligned}$$

et $g'(A)(H) = A^2H + AHA + HA^2$ pour toutes matrices A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, l'application linéaire $g'(I) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme. En effet, pour toute matrice H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $g'(I)(H) = L_I(H) = 3H$. Donc, d'aprés le théorème d'inversion locale, l'application g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en I, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un voisinage ouvert V de $g(I) = I$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $g(U) = V$ et la restriction $g|_U$ de g sur U soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U et V.

Puisque V est un ouvert, il existe un nombre réel strictement positif ε tel que la boule ouverte $B(I, \varepsilon)$ de centre I et de rayon ε soit entièrement contenue dans V. Puisque $g|_U$ est une bijection entre U et V, on obtient que, pour tout matrice H dans $B(I, \varepsilon)$ (c'est-à-dire, pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|H - I\| < \varepsilon$), il existe une matrice M dans U telle que $g(M) = H$, c'est-à-dire, une matrice M dans U telle que $M^3 = H$.

Exercice 4

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application linéaire $f'(x)$ est injective. En effet, si $f'(x)(h)$ est le vecteur nul pour un certain vecteur $h \in \mathbb{R}^n$, alors l'inégalité

$$\langle f'(x)(h), h\rangle \geq k\,\langle h, h\rangle$$

implique que h est le vecteur nul. Donc, l'application $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, car toute application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.

(b) Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit y_0 un point appartenant à $f(U)$. Considérons un point x_0 de U tel que $f(x_0) = y_0$. L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ et, d'après (a), l'application linéaire $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme. Donc, d'aprés le théorème d'inversion locale, l'application

f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en x_0, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert V_0 de y_0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $f(U_0) = V_0$ et la restriction $f|_{U_0}$ de f sur U_0 soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_0 et V_0.

L'intersection $U_0 \cap U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ce qui implique que $V_0 \cap f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (car $f|_{U_0}$ est un homéomorphisme entre U_0 et V_0). Donc, $V_0 \cap f(U)$ est un ouvert qui contient y_0 et qui est entièrement contenu dans $f(U)$. Ceci prouve que $f(U)$ est un ouvert.

(c) Considérons l'application $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\psi(t) = x + t(y-x)$. Cette application est différentiable en tout point t de $]0,1[$ et $\psi'(t) = y - x$ (on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{R}^n$).

Considérons aussi l'application $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie $\xi(z) = \langle z, y-x \rangle$. Cette application est linéaire. Donc, ξ est différentiable en tout point z de $\mathbb{R}^n$ et $\xi'(z) = \xi$.

On a $\varphi = \xi \circ f \circ \psi$. Donc, φ est différentiable en tout point de $]0,1[$. De plus, pour tout point t_0 de $]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t_0) &= (\xi \circ f \circ \psi)'(t_0) = (\xi \circ f)'(\psi(t_0))(\psi'(t_0)) \\
&= (\xi \circ f)'(\psi(t_0))(y-x) = (\xi'(f(\psi(t_0))) \circ f'(\psi(t_0)))(y-x) \\
&= (\xi \circ f'(\psi(t_0)))(y-x) = \langle f'(x + t_0(y-x))(y-x), y-x \rangle .
\end{aligned}$$

(Dans ce calcul, on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ et F, pour tout espace vectoriel F.)

(d) Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\varphi'(t) = \langle f'(x + t(y-x))(y-x), y-x \rangle \geq k \langle y-x, y-x \rangle .$$

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, on obtient l'inégalité

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq k \langle y-x, y-x \rangle ,$$

autrement dit,

$$\langle f(y) - f(x), y-x \rangle \geq k \langle y-x, y-x \rangle .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \geq \langle f(y) - f(x), y-x \rangle .$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité

$$\langle f(y) - f(x), y-x \rangle \geq k \langle y-x, y-x \rangle ,$$

on obtient

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \geq \langle f(y) - f(x), y-x \rangle \geq k \|y-x\|_2^2,$$

d'où

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \geq k \|y-x\|_2.$$

(e) Soit V un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Considérons une suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $z_i \in f(V)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et la suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}^n$. Notons l la limite de cette suite, et montrons que $l \in f(V)$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, choisissons $x_i \in V$ tel que $f(x_i) = z_i$. D'après (d), pour tous entiers positifs ou nuls i et j, on a

$$\|z_i - z_j\|_2 = \|f(x_i) - f(x_j)\|_2 \geq k\|x_i - x_j\|.$$

Cette inégalité et la convergence de la suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ impliquent que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Donc, la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge. Notons a sa limite. Puisque V est fermé, on a $a \in V$. De plus, $f(a) = l$, d'où $l \in f(V)$.

Par conséquent, $f(V)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

(f) Puisque $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathbb{R}^n$, d'après (b) et (e), on obtient que $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathbb{R}^n$. De plus, $f(\mathbb{R}^n)$ est non vide. Donc, la connexité de $\mathbb{R}^n$ implique que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ et, d'après (a), l'application linéaire $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc, d'aprés le théorème d'inversion locale, l'application f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, f est injective, car

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \geq k\|y - x\|_2.$$

pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ (voir (d)). Donc, f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire, sur $\mathbb{R}^n$.