Exercices de 4ème – Chapitre 4 – Le triangle rectangle

Énoncés

Exercice 1

Construire un triangle quelconque *RST*. Soit *V* le point d'intersection de [*RS*] et du cercle de diamètre [*RT*].
Déterminer ce que représente la droite (*VT*) pour le triangle *RST*.

Exercice 2

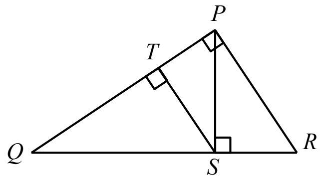
Tracer un segment [*BC*] de longueur 7cm, puis construire le triangle *ABC* rectangle en *A* tel que *AB*=5cm.
Expliquer succinctement la démarche.

Exercice 3

Étant donnés une droite (*d*) et deux points *A* et *B* n'appartenant pas à cette droite, peut-on toujours construire un point *M* appartenant à (*d*) tel que *AMB* soit rectangle en *M* ?
Réfléchir à toutes les situations possibles en s'aidant de schémas.

Exercice 4

Pour chacun des cinq triangles rectangles présents sur ce dessin, écrire la relation du théorème de Pythagore.



Exercice 5

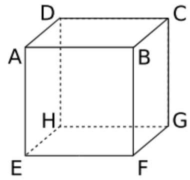
a] *ERL* est un triangle rectangle en *R* tel que *ER*=9cm et *RL*=12cm. Calculer la longueur de [*EL*].
b] *ARC* est un triangle rectangle en *C* tel que *AR*=52mm et *RC*=48mm. Calculer la longueur de [*AC*].
c] *KXZ* est un triangle rectangle en *K* tel que *KX*=6,8cm et *ZX*=68,9mm. Calculer la longueur de [*KZ*].

Exercice 6

Calculer la hauteur, arrondie au centimètre près, à laquelle se trouve le sommet d'une échelle de 5,5 m de long en appui sur un mur perpendiculaire au sol et placée à 14 dm du pied du mur.

Exercice 7

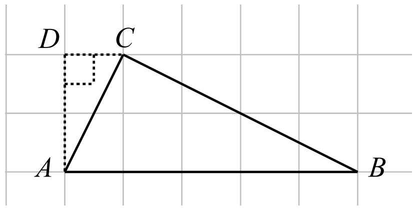
ABCDEFGH est un cube d’arête 10 cm.
Calculer la longueur de la grande diagonale [*EC*] au mm près.



Exercice 8

Soit *TOC* un triangle tel que *TO*=77 mm ; *OC*=35 mm et *CT*=85 mm.
Soit *ABC* tel que *AB*=17 cm ; *AC*=15cm et *BC*=8 cm.
Déterminer si *TOC* et *ABC* sont des triangles rectangles.

Exercice 9



Le quadrillage ci-contre est formé de carrés de 1cm de côté.

a] Déterminer la valeur de AC^2 .

b] Déterminer la valeur de BC^2 .

c] Le triangle *ABC* est-il rectangle en *C* ?

Exercice 10

Soit *ABCD* un parallélogramme. On donne, en mètres : *AB*=8,8 ; *AD*=77,19 et *AC*=77,69.
Déterminer si *ABCD* est un rectangle.

Exercice 11

a] Tracer le parallélogramme *MNPL* de centre *O* tel que : ML=68mm ; MP=64mm et LN=120 mm.

b] Déterminer la nature précise de *MNPL*.

Exercice 12

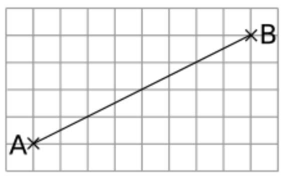
a] Tracer le triangle *RST* tel que *RS*=16cm ; *ST*=63cm et *RT*=65cm.

b] Tracer le cercle circonscrit à *RST* puis déterminer la valeur de son rayon.

Exercice 13

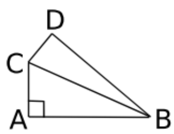
On considère le triangle *RST* tel que *RS*=32 cm ; *ST*=40cm et *RT*=24cm. Montrer que *R* appartient au cercle de diamètre [*ST*].

Exercice 14



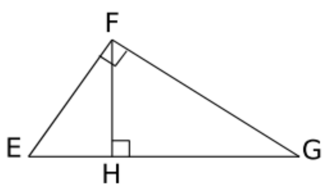
On a tracé un segment [AB] sur une feuille à petits carreaux mesurant chacun 0,8cm de côté.
Calculer un arrondi de *AB* au mm près.

Exercice 15



On considère la figure ci-contre avec :
AB=4,2 cm ; *AC*=3,4 cm ; *CD*=2,1 cm et *BD*=5 cm.
Chercher si les points *A*, *B*, *C* et *D* sont cocycliques, c'est-à-dire s'ils appartiennent à un même cercle.

Exercice 16



En utilisant la figure ci-contre, compléter les phrases ci-dessous.

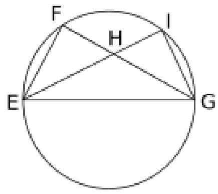
a] Dans le triangle *EGF* .... on a : $\cos\widehat{FEG}=...$

b] Dans le triangle *FHE* .... on a : $\cos\widehat{FEG}=...$

c] Dans le ....…................................., on a $\dfrac{GH}{FG}=...$

d] Dans le ....…................................., on a $\dfrac{FH}{FG}=...$

Exercice 17



Les points F et I appartiennent au cercle de diamètre $[EG]$.
Montrer que $FE \times \cos \widehat{IGE} = IG \times \cos \widehat{FEG}$.

Exercice 18

On a le triangle KID rectangle en K. Sans justifier, compléter par des longueurs arrondies au cm et des angles arrondis au degré.

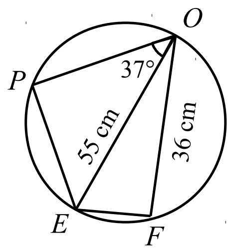
	IK	ID	$\widehat{KID}$
a]		7cm	50°
b]	3,2cm		13°
c]		2,2m	75°
d]	1m		87°
e]	5cm	7cm	
f]	85cm	2,2m	

Exercice 19

Sur la figure ci-contre, les points P et F appartiennent au cercle de diamètre $[OE]$.

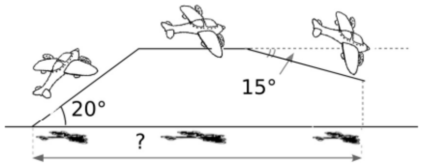
1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EOF}$ arrondie au degré.

2. Calculer la longueur PE arrondie au millimètre.



Exercice 20

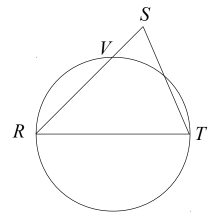
Un avion décolle et prend de l'altitude pendant 1,5 minutes, il poursuit son trajet à cette altitude pendant 10 minutes et redescend pendant une minute (voire schéma).
La vitesse de l'avion reste constante à 480 km/h.
En supposant que le soleil soit au zénith et que ses rayons soient perpendiculaires au sol, calculer la distance parcourue par son ombre sur le sol arrondie au km près.



Corrigés

Exercice 1

Comme V appartient au cercle de diamètre $[RT]$ alors le triangle RVT est rectangle en V.
Comme la droite (VT) est perpendiculaire à $[RS]$ alors **(VT) est la hauteur issue de T du triangle RST**.



Exercice 2

On trace le segment $[BC]$ de longueur 7cm, ainsi que le cercle de diamètre $[BC]$.
On prend un écartement de 5cm au compas. On plante celui-ci en B et on nomme A une intersection de l'arc avec le cercle.
Comme A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est bien rectangle en A.

Exercice 3

On trace le cercle de diamètre $[AB]$. Trois situations sont possibles :

- (d) coupe le cercle en deux points. Dans ce cas, chacun des deux points d'intersection peut être le point M. En effet, comme M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors le triangle ABM est rectangle en M.
- (d) est tangent au cercle en un point. Dans ce cas, M est ce point, pour la même raison que précédemment.
- (d) n'a pas de point en commun avec le cercle. Dans ce cas, on ne peut pas construire M tel que AMB soit rectangle en M.

Exercice 4

Dans QTS rectangle en T on a : $QS^2 = QT^2 + TS^2$.
Dans QPR rectangle en P on a : $QR^2 = QP^2 + PR^2$.
Dans QPS rectangle en S on a : $QP^2 = QS^2 + PS^2$.
Dans PRS rectangle en S on a : $PR^2 = PS^2 + RS^2$.
Dans PTS rectangle en T on a : $PS^2 = PT^2 + TS^2$.

Exercice 5

a] Comme ERL est rectangle en R alors $EL^2 = ER^2 + LR^2$. On a donc $EL^2 = 9^2 + 12^2$ d'où $EL^2 = 225$. On a donc **EL = 15cm**.
b] Comme ARC est rectangle en C alors $AR^2 = AC^2 + CR^2$. On a donc $52^2 = AC^2 + 48^2$ d'où $AC^2 = 400$. On a donc **AC = 20mm**.
c] Comme KXZ est rectangle en K alors $ZX^2 = ZK^2 + XK^2$. Donc $6{,}89^2 = ZK^2 + 6{,}8^2$ d'où $ZK^2 = 1{,}2321$. On a donc **ZK = 1,11cm**.

Exercice 6

Soit h la hauteur à laquelle se trouve le sommet de l'échelle. Comme le mur est perpendiculaire au sol, alors l'échelle forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle et on a : $5{,}5^2 = 1{,}4^2 + h^2$. On a donc $h^2 = 28{,}29$. D'où $h \approx 5{,}3$.
Le sommet de l'échelle est à une hauteur d'environ **5,3m**.

Exercice 7

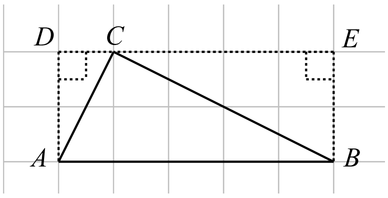
Comme ABC est rectangle en B alors $AC^2 = AB^2 + CB^2$. D'où $AC^2 = 200$.
Comme AEC est rectangle en A alors $EC^2 = AE^2 + CA^2$. D'où $EC^2 = 100 + 200$. On a donc $EC^2 = 300$ d'où $\boldsymbol{EC \approx 17{,}3\ \text{cm}}$.

Exercice 8

On a $CT^2 = 85^2$ et $OC^2 + TO^2 = 35^2 + 77^2$.
Donc $CT^2 = 7225$ et $OC^2 + TO^2 = 7154$.
Comme $CT^2 \neq OC^2 + OT^2$ et que CT est son plus grand côté alors le triangle ***COT* n'est pas rectangle**.

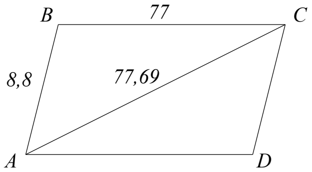
On a $AB^2 = 17^2$ et $AC^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2$.
Donc $AB^2 = 289$ et $AC^2 + BC^2 = 289$.
Comme $AB^2 = AC^2 + BC^2$ alors le triangle ***ABC* est rectangle en *C*.**

Exercice 9



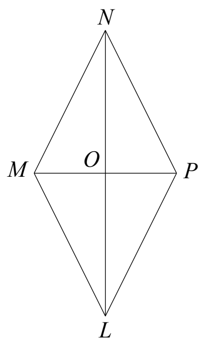
a] Comme ACD est rectangle en D alors $AC^2 = AD^2 + CD^2$. D'où $AC^2 = 5$.
b] On place E de telle sorte que $ABED$ soit un rectangle.
Comme BCE est rectangle en E alors $BC^2 = BE^2 + CE^2$. D'où $BC^2 = 20$.
c] On a $AB^2 = 5^2$ et $AC^2 + BC^2 = 5 + 20$.
Donc $AB^2 = 25$ et $AC^2 + BC^2 = 25$.
Comme $AB^2 = AC^2 + BC^2$ alors le triangle ***ABC* est rectangle en *C*.**

Exercice 10



On a $AC^2 = 77{,}69^2$ et $AB^2 + BC^2 = 8{,}8^2 + 77{,}19^2$.
Donc $AC^2 = 6035{,}7361$ et $AB^2 + BC^2 = 6035{,}7361$.
Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en B.
Comme le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit alors **c'est un rectangle**.

Exercice 11

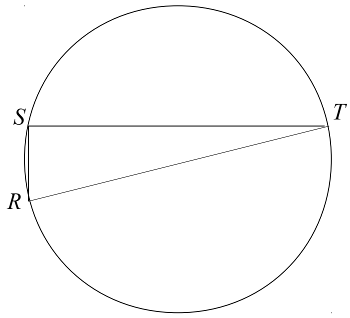


a] Voir ci-contre.
b]
Comme O est le centre du parallélogramme $MNPL$ alors O est le milieu des diagonales $[MP]$ et $[LN]$.
On en déduit que MO=32mm et OL=60mm.

On a $ML^2 = 68^2$ et $MO^2 + OL^2 = 32^2 + 60^2$.
Donc $ML^2 = 4624$ et $MO^2 + OL^2 = 4624$.
Comme $ML^2 = MO^2 + OL^2$ alors le triangle MOL est rectangle en O.

Comme les diagonales du parallélogramme $MNPL$ sont perpendiculaires alors ***MNPL* est un losange**.

Exercice 12



a] Voir ci-contre.
b]
On a $RT^2 = 65^2$ et $RS^2 + ST^2 = 16^2 + 63^2$.
On a $RT^2 = 4225$ et $RS^2 + ST^2 = 4225$.
Comme $RT^2 = RS^2 + ST^2$ alors <u>le triangle RST est rectangle en S</u>.

Comme le triangle RST est rectangle en S alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse $[RT]$. On en déduit que **son rayon vaut** $\mathbf{\frac{65}{2} = 32{,}5\,cm}$.

Exercice 13

On a $ST^2 = 40^2$ et $RS^2 + RT^2 = 32^2 + 24^2$.
On a $ST^2 = 1600$ et $RS^2 + RT^2 = 1600$.
Comme $ST^2 = RS^2 + RT^2$ alors le triangle RST est rectangle en R.
Comme RST est rectangle en R alors ***R* appartient au cercle de diamètre [*ST*]**.

Exercice 14

Comme le quadrillage est formé de droites perpendiculaires les unes aux autres, alors on peut considérer [AB] comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés mesurent 4 et 8 carreaux, soit 3,2cm et 6,4cm.
On a alors $AB^2 = 3{,}2^2 + 6{,}4^2$ donc $AB^2 = 51{,}2$. On a donc $\boldsymbol{AB \approx 7{,}2\,\text{cm}}$.

Exercice 15

Comme ABC est rectangle en A alors <u>A appartient au cercle de diamètre $[BC]$</u>.

Comme ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. D'où $BC^2 = 4{,}2^2 + 3{,}4^2$ soit $BC^2 = 29{,}2$.
On a $BC^2 = 29{,}2$ et $CD^2 + BD^2 = 2{,}1^2 + 5^2$.
Donc $BC^2 = 29{,}2$ et $CD^2 + BD^2 = 29{,}41$.
Comme $BC^2 \neq CD^2 + BD^2$ alors le triangle BCD n'est pas rectangle en D.
Par conséquent, <u>D n'appartient pas au cercle de diamètre $[BC]$</u>.

Comme le cercle circonscrit au triangle ABC est le seul à passer par ces trois points et que D ne lui appartient pas, alors **les points A, B, C et D ne sont pas cocycliques**.

Exercice 16

a] Dans le triangle EGF **rectangle en F**, on a : $\cos\widehat{FEG} = \boldsymbol{\dfrac{EF}{EG}}$

b] Dans le triangle FHE **rectangle en H**, on a : $\cos\widehat{FEG} = \boldsymbol{\dfrac{EH}{EF}}$

c] Dans le triangle **FHG rectangle en H** on a $\dfrac{GH}{FG} = \boldsymbol{\cos\widehat{FGH}}$

d] Dans le triangle **FHE rectangle en H** on a $\dfrac{FH}{FG} = \boldsymbol{\cos\widehat{GFH}}$

Exercice 17

Comme F et I appartiennent au cercle de diamètre $[EG]$ alors les triangles EFG et EGI sont respectivement rectangles en F et I.
Par conséquent on a $\cos\widehat{IGE} = \dfrac{IG}{EG}$ et $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{EF}{EG}$.

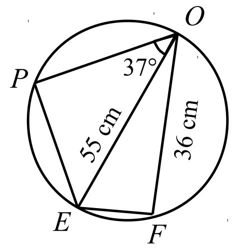
D'où $EG = \dfrac{IG}{\cos\widehat{IGE}}$ et $EG = \dfrac{EF}{\cos\widehat{FEG}}$.

De ces deux égalités on déduit $\dfrac{EF}{\cos\widehat{FEG}} = \dfrac{IG}{\cos\widehat{IGE}}$ ou encore $FE \times \cos\widehat{IGE} = IG \times \cos\widehat{FEG}$.

Exercice 18

	IK	ID	$\widehat{KID}$
a]	**4cm**	7cm	50°
b]	3,2cm	**3cm**	13°
c]	**0,57m**	2,2m	75°
d]	1m	**19,11m**	87°
e]	5cm	7cm	**44°**
f]	85cm	2,2m	**67°**

Exercice 19



1. Comme F appartient au cercle de diamètre $[EO]$ alors le triangle EFO est rectangle en F.

Par conséquent on a $\cos(\widehat{EOF})=\dfrac{OF}{OE}$ soit $\cos(\widehat{EOF})=\dfrac{36}{55}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{EOF}\approx 49°}$.

2. Comme P appartient au cercle de diamètre $[EO]$ alors le triangle EPO est rectangle en P.
Comme la somme des mesures des angles du triangle EPO vaut 180° alors $\widehat{PEO}=180-90-37$ soit $\widehat{PEO}=53°$.

Comme le triangle PEO est rectangle en P alors $\cos(\widehat{PEO})=\dfrac{PE}{OE}$ donc $PE=\cos(\widehat{PEO})\times OE$ soit $\boldsymbol{PE\approx 33{,}1\,\text{cm}}$.

Exercice 20

Nommons d_1 , d_2 , d_3 et s_1 , s_2 , s_3 les distances en l'air et au sol respectives de chaque portion du trajet.

Comme la vitesse de l'avion est constante et qu'il parcourt $\dfrac{480}{60}=8$ km par minute alors on a : $d_1=12\,\text{km}$; $d_2=80\,\text{km}$ et $d_3=8\,\text{km}$.

Comme dans la deuxième portion du trajet, l'avion est parallèle au sol alors $s_2=d_2=80\,\text{km}$.
Comme les portions 1 et 3 du tajet forment deux triangles rectangles alors on a :
$\cos(20°)=\dfrac{s_1}{d_1}$ et $\cos(15°)=\dfrac{s_3}{d_3}$ soit $s_1=d_1\times\cos(20°)$ et $s_3=d_3\times\cos(15°)$.

La distance totale parcourue par l'ombre au sol est donc $12\times\cos(20°)+80+8\times\cos(15°)\approx\mathbf{99\,km}$.