Exercices de $4^{ème}$ – Chapitre 2 - Droites, cercles et triangles

Énoncés

Exercice 1

Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indiquer, si possible, le numéro du théorème à appliquer parmi les trois théorèmes suivants :
Théorème 1 : « Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. »
Théorème 2 : « Si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. »
Théorème 3 : « Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté. »

Colorier en vert le triangle considéré.

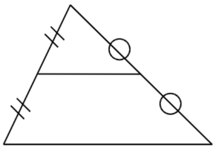


fig 1 : th .....

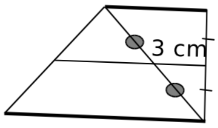


fig 2 : th .....

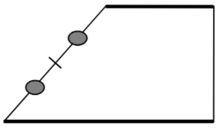


fig 3 : th .....

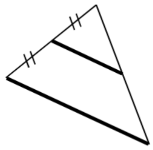


fig 4 : th .....

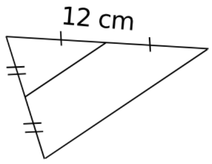


fig 5 : th .....

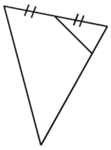


fig 6 : th .....

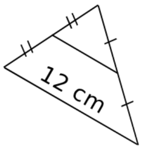


fig 7 : th .....

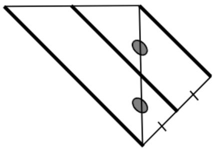


fig 8 : th .....

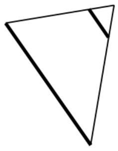


fig 9 : th .....

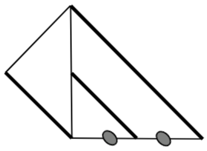
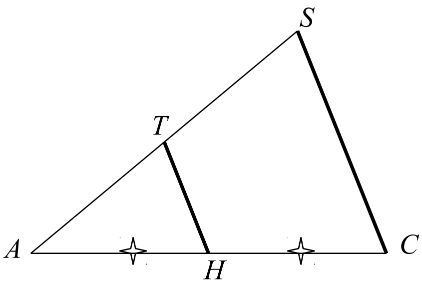


fig 10 : th .....

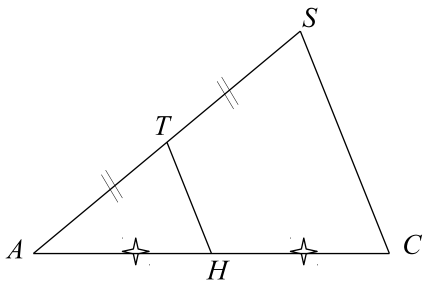
Exercice 2

Sur le dessin ci-contre, on sait que (TH) // (SC). Montrer que T est le milieu du segment $[AS]$.



Exercice 3

En utilisant le codage du dessin ci-contre, montrer que (CS) et (TH) sont parallèles.



Exercice 4

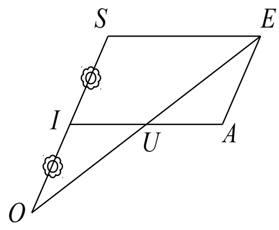
1. Construire un triangle CHN tel que $CH = 2{,}3$ cm ; $CN = 3$ cm et $NH = 4$ cm. Construire le point I symétrique du point C par rapport à H et le point E symétrique du point C par rapport à N.

2. Montrer que les droites (HN) et (IE) sont parallèles.

3. Calculer IE.

Exercice 5

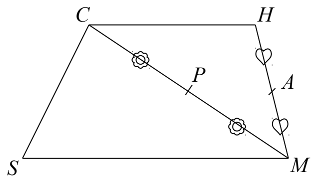
AISE est un parallélogramme tel que $SE = 2$ cm et $IS = 1,8$ cm.



1. Que peut-on dire des droites (UI) et (ES) ? Justifier.
2. Montrer que U est le milieu du segment [OE].
3. Calculer UI.

Exercice 6

CHMS est un trapèze dont les côtés [CH] et [MS] sont parallèles.



1. Montrer que (CH) et (PA) sont parallèles.
2. Montrer que (PA) et (MS) sont parallèles.

Exercice 7

Rayer les réponses qui ne conviennent pas.

Dans un triangle, une ... passe forcément par un sommet.	bissectrice	hauteur	médiane	médiatrice
Dans un triangle, une ... passe forcément par le milieu d'un côté.	bissectrice	hauteur	médiane	médiatrice
Les trois ... d'un triangle se coupent en un seul point.	bissectrices	hauteurs	médianes	médiatrices
L'intersection des ... est le centre d'un cercle lié au triangle.	bissectrices	hauteurs	médianes	médiatrices
Une ... ne peut exister que dans un triangle.	bissectrice	hauteur	médiane	médiatrice
L'axe de symétrie d'un triangle isocèle est une ... du triangle.	bissectrice	hauteur	médiane	médiatrice

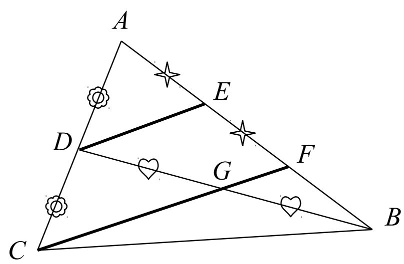
Exercice 8

Soit un triangle RST avec I, J, K et L les milieux respectifs de [RS], [RT], [RI] et [RJ].

1. Montrer que $KL = \frac{1}{2} IJ$
2. Montrer que $IJ = \frac{1}{2} ST$
3. En déduire que $KL = \frac{1}{4} ST$

Exercice 9

Sur la figure ci-contre, on a $AB = 6$ cm.



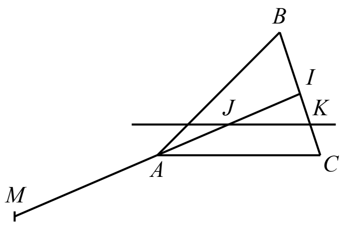
1. Démontrer que les droites (DE) et (CF) sont parallèles.
2. Démontrer que F est le milieu de [EB].
3. En déduire les mesures de [AE], [EF] et [FB].

Exercice 10

1. Construire un triangle *EAU* quelconque.
2. Placer *L* milieu de [*AU*], *N* milieu de [*AE*] et *M* milieu de [*EU*].
   O est le point d'intersection de (*EL*) et de (*MN*).
3. La droite (*OL*) est-elle forcément une médiane du triangle *LMN* ? Justifier la réponse.

Exercice 11

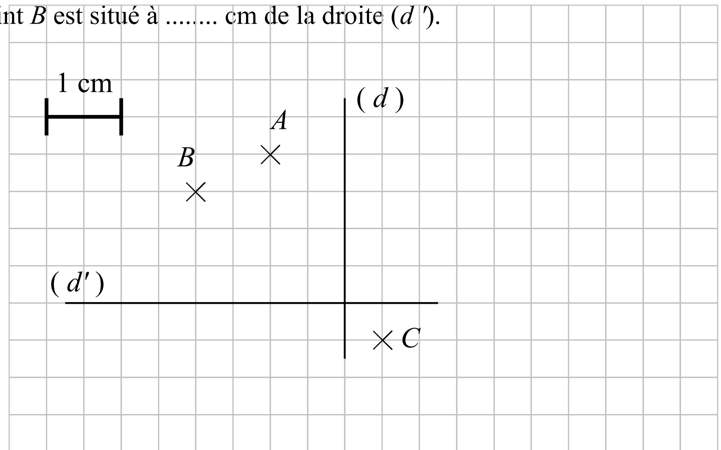
ABC est un triangle quelconque.
I est le milieu de [*BC*]. *J* est le milieu de [*AI*].
M est le symétrique de *I* par rapport au point *A*.
La parallèle à (*AC*) passant par *J* coupe (*BC*) en *K*.



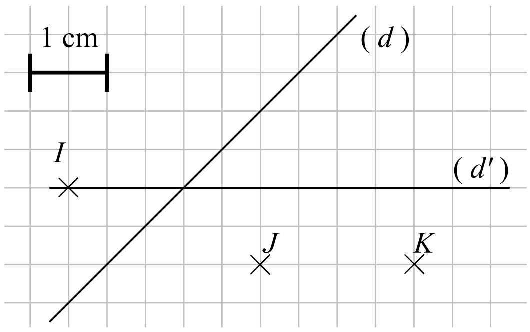
1. Faire le dessin.
2. Démontrer que *K* est le milieu de [*IC*].
3. Démontrer que les droites (*AK*) et (*MC*) sont parallèles.
4. Que représente le point d'intersection des droites (*CA*) et (*MK*) pour le triangle *MIC* ?
5. Quelle donnée de l'énoncé n'a pas été utile dans ce problème ?

Exercice 12

1.
Le point *A* est situé à .... cm de la droite (*d* ').
La distance du point *B* à la droite (*d*) vaut …..... cm.
La distance du point *C* à la droite (*d*) vaut .... cm.
Le point *B* est situé à .... cm de la droite (*d* ').



2.
La distance du point *I* à la droite (*d'*) est .... cm.
Le point *K* est situé à .... cm la droite (*d'*).
Parmi les points *I*, *J* et *K*, le point le plus proche de (*d*) est ....

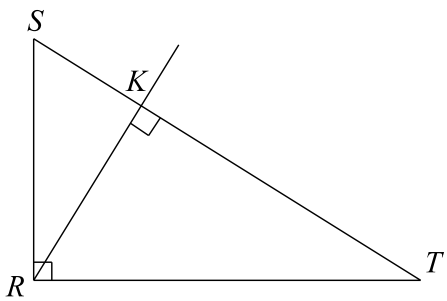


Exercice 13

RST est un triangle rectangle en *R* et *K* est le pied de la hauteur issue de *R*.
La distance du point *R* à la droite (*ST*) est la longueur *RK*.

De la même façon, quelle est la distance

a] du point *S* à la droite (*RT*) ?
b] du point *S* à la droite (*RK*) ?
c] du point *T* à la droite (*SR*) ?
d] du point *T* à la droite (*RK*) ?



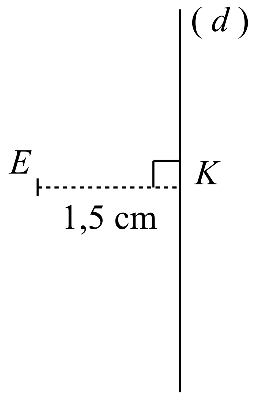
Exercice 14

Sur la figure ci-contre, K est le pied de la perpendiculaire à la droite (d) passant par E.

1. Construire en vert l'ensemble des points situés à 1 cm de la droite (d).

2. Construire en bleu l'ensemble des points situés à 2 cm du point E.

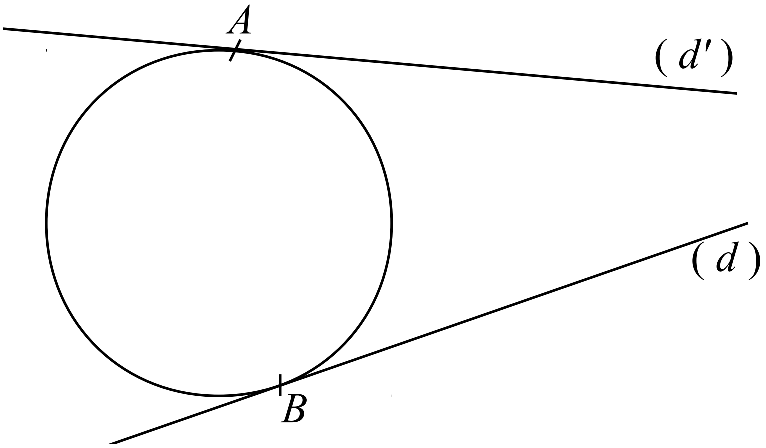
3. Existe-t-il des points situés à la fois à 1 cm de la droite (d) et à 2 cm du point E ?
Si oui, indiquer combien et les marquer en rouge sur la figure.



Exercice 15

Les droites (d) et (d') sont deux tangentes au cercle.

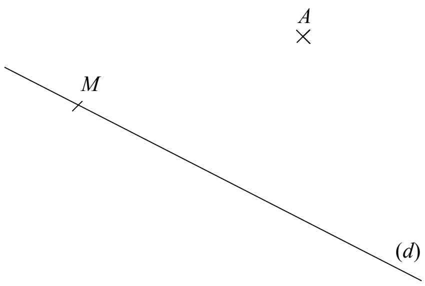
Construire le centre de ce cercle.



Exercice 16

Le but de cet exercice est de construire un cercle (C) qui passe par A et tel que la droite (d) soit tangente à (C) au point M.
On appellera O le centre du cercle (C).

1. Compléter le schéma ci-dessous **à main levée** puis le coder.
2. Que dire du point O pour [AM] ? Justifie.
3. Que dire des droites (d) et (MO) ? Justifie.
4. En déduire la construction du cercle.

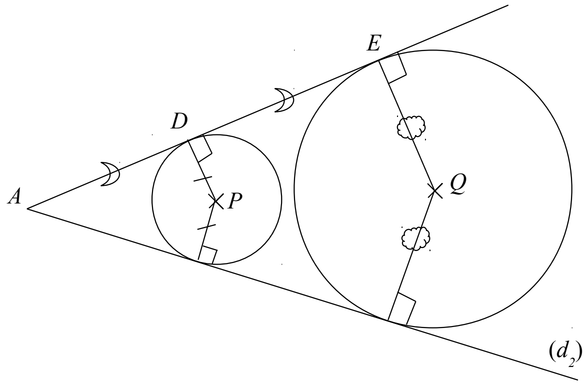


Exercice 17

Construire le triangle OMR tel que MR = 5 cm ; $\widehat{OMR} = 40°$ et $\widehat{ORM} = 25°$.

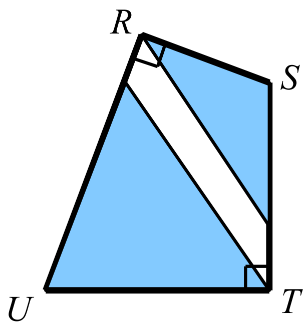
1. Sur cette figure, construire le triangle MER tel que O soit le centre du cercle inscrit dans ce triangle.
2. Quelle est la nature du triangle MER ? Justifier.
3. Démontrer que $OE = OR$.

Exercice 18



1. Démontrer que les points A, P et Q sont alignés.
2. Sachant que DP = 3,6 cm, combien mesure le segment [EQ] ? Justifier.

Exercice 19



Deux triangles isocèles bleus de sommets principaux S et U recouvrent presque entièrement le quadrilatère $RSTU$.
Le point U appartient-il à la bissectrice de $\widehat{RST}$? Justifier.

Exercice 20

1. Tracer un cercle de centre O. Soit A un point du cercle et M un autre point du cercle tel que $AM = OM$.

2. Construire le point N symétrique de O par rapport à M.

3. Peut-on affirmer avec certitude que la droite (AN) est tangente au cercle en A ? Justifier.

Corrigés

Exercice 1

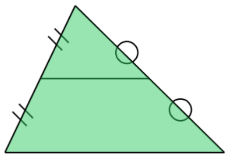


Fig 1 : th 1.

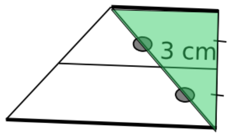


Fig 2 : th 2.

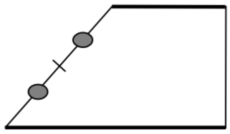


Fig 3 : th .....

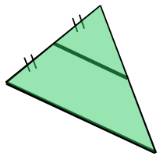


Fig 4 : th 3.

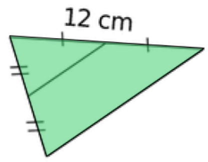


Fig 5 : th 1.

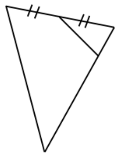


Fig 6 : th .....

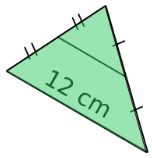


Fig 7 : th 2.

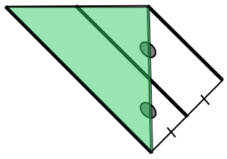


Fig 8 : th 3.

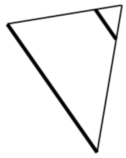


Fig 9 : th .....

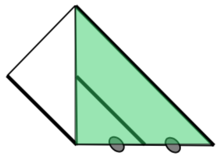


Fig 10 : th 3.

Exercice 2

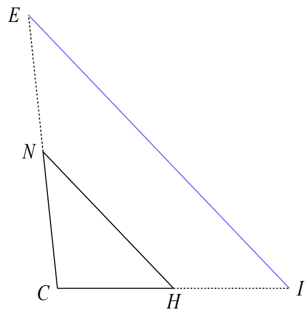
Dans le triangle *ACS*, comme (*TH*) est parallèle au côté [*CS*] et qu'elle passe par le milieu *H* du côté [*AC*], alors (*TH*) passe par le milieu de [*AS*]. Donc ***T* est le milieu du segment [*AS*]**.

Exercice 3

Dans le triangle *ACS*, comme (*TH*) passe par le milieu *H* du côté [*AC*] et par le milieu *T* du côté [*AS*], alors (*TH*) est parallèle au troisième côté donc **(*TH*) est parallèle à (*CS*)**.

Exercice 4

1. Voir ci-contre.



2. Comme *E* et *I* sont les symétriques de *C* par rapport à respectivement *N* et *H* alors *N* et *H* sont les milieux respectifs de [*CE*] et [*CI*].
Dans le triangle *CEI* : comme (*HN*) passe par les milieux des côtés [*CE*] et [*CI*] alors **(*HN*) // (*IE*)**.

3. Dans le triangle *CEI*, comme [*HN*] a pour extrémités les milieux des côtés [*CE*] et [*CI*] alors on a $IE = 2 \times NH$ donc $\boldsymbol{IE = 8}$ **cm**.

Exercice 5

1. Comme *AISE* est un parallélogramme, alors (*AI*)//(*SE*) donc **(*UI*) // (*ES*)**.

2. Dans le triangle *OSE*, comme (*IU*) passe par le milieu du côté [*OS*] et est parallèle au côté [*SE*] alors (*IU*) coupe [*OE*] en son milieu. Donc ***U* est le milieu de [*OE*]**.

3. Dans le triangle *OSE*, comme [*IU*] a pour extrémités les milieux des côtés [*OS*] et [*OE*] alors on a $SE = 2 \times IU$ donc $\boldsymbol{IU = 1}$ **cm**.

Exercice 6

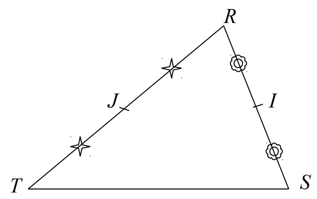
1. Dans le triangle *CHM* : comme (*PA*) passe par les milieux des côtés [*CM*] et [*HM*] alors **(*PA*) // (*CH*)**.

2. Comme (*PA*) et (*MS*) sont toutes deux parallèles à une même droite (*CH*) alors **(*PA*) // (*MS*)**.

Exercice 7

Dans un triangle, une ... passe forcément par un sommet.	**bissectrice**	**hauteur**	**médiane**	
Dans un triangle, une ... passe forcément par le milieu d'un côté.			**médiane**	**médiatrice**
Les trois ... d'un triangle se coupent en un seul point.	**bissectrices**	**hauteurs**	**médianes**	**médiatrices**
L'intersection des ... est le centre d'un cercle lié au triangle.	**bissectrices**			**médiatrices**
Une ... ne peut exister que dans un triangle.		**hauteur**	**médiane**	
L'axe de symétrie d'un triangle isocèle est une ... du triangle.	**bissectrice**	**hauteur**	**médiane**	**médiatrice**

Exercice 8



1. Dans *RIJ*, comme [*KL*] a pour extrémités les milieux des côtés [*RI*] et [*RJ*] alors $\boldsymbol{KL=\frac{1}{2}IJ}$.

2. Dans *RST*, comme [*IJ*] a pour extrémités les milieux des côtés [*RS*] et [*RT*] alors $\boldsymbol{IJ=\frac{1}{2}ST}$.

3. Comme $KL=\frac{1}{2}IJ$ et $IJ=\frac{1}{2}ST$ alors $KL=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ST$ donc $\boldsymbol{KL=\frac{1}{4}ST}$.

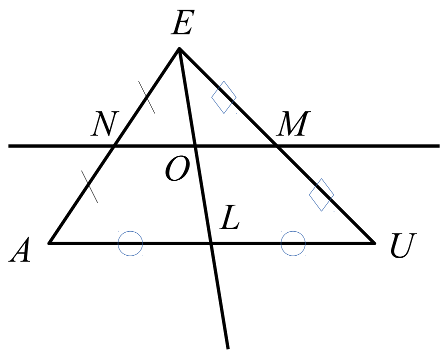
Exercice 9

1. Dans le triangle *ACF*, comme (*DE*) passe par les milieux des côtés [*AC*] et [*AF*] alors (*DE*) est parallèle au troisième côté. D'où **(*DE*)||(*CF*)**.

2. Dans *BED*, comme (*GF*) passe par le milieu du côté [*BD*] et est parallèle au côté [*DE*] alors (*GF*) coupe [*BE*] en son milieu. Donc ***F* est le milieu de [*EB*]**.

3. Comme *E* et *F* sont les milieux respectifs de [*AF*] et [*EB*] alors *AE* = *EF* et *EF* = *FB*.
Par conséquent, [*AE*], [*EF*] et [*FB*] mesurent chacun $\frac{1}{3}\times AB=$ **2cm** .

Exercice 10



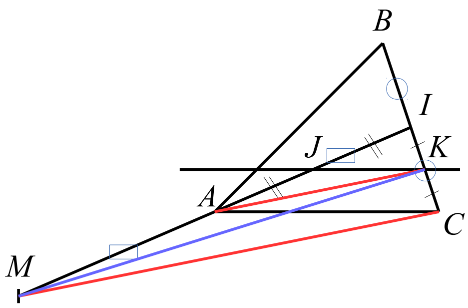
1. 2. Voir ci-contre.

3. Dans le triangle *EAL*, comme (*ON*) passe par le milieu *N* de [*EA*] en étant parallèle au côté [*AL*] alors elle coupe le troisième côté [*EL*] en son milieu.
Donc *O* est le milieu de [*EL*].
Comme le segment [*ON*] a pour extrémités les milieux des côtés [*EA*] et [*EL*] alors on a $ON=\frac{1}{2}AL$.

De même, dans le triangle *ELU*, on démontre que $OM=\frac{1}{2}UL$.

Comme on sait que *AL* = *LU* alors *ON* = *OM*, d'où *O* est le milieu de [*MN*]. **(*OL*) est donc bien une médiane du triangle *LMN*.**

Exercice 11



1. Voir ci-contre.

2. Dans le triangle *IAC*, comme (*JK*) passe par le milieu *J* de [*AI*] en étant parallèle à [*AC*] alors elle coupe [*IC*] en son milieu.
Donc ***K* est le milieu de [*IC*]**.

3. Comme *M* est le symétrique de *I* par rapport à *A* alors *A* est le milieu de [*MI*].
Dans le triangle *IMC*, comme (*AK*) passe par les milieux des côtés [*IM*] et [*IC*] alors **(*AK*) est parallèle à (*MC*)**.

4. Comme *A* et *K* sont les milieux respectifs des côtés [*MI*] et [*IC*] alors (*CA*) et (*MK*) sont des médianes du triangle *MIC*.
Le point d'intersection des droites (*CA*) et (*MK*) est **le centre de gravité du triangle *MIC***.

5. La donnée de l'énoncé qui n'était pas nécessaire était le fait que *I* est le milieu de [*BC*].
Ce problème aurait été traité de la même façon si *I* avait été placé n'importe où sur [*BC*].

Exercice 12

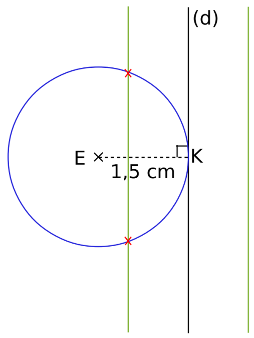
1.
Le point *A* est situé à 2 cm de la droite (*d'*).
La distance du point *B* à la droite (*d*) vaut 2 cm.
La distance du point *C* à la droite (*d*) vaut 0,5 cm.
Le point *B* est situé à **1,5 cm** de la droite (*d'*).

2.
La distance du point *I* à la droite (*d'*) est 0 cm.
Le point *K* est situé à 1 cm la droite (*d'*).
Parmi les points *I*, *J* et *K*, le point le plus proche de (*d*) est ***I*** .

Exercice 13

a] La distance du point *S* à la droite (*RT*) est ***SR***.
b] La distance du point *S* à la droite (*RK*) est ***SK***.
c] La distance du point *T* à la droite (*SR*) est ***RT***.
d] La distance du point *T* à la droite (*RK*) est ***KT***.

Exercice 14

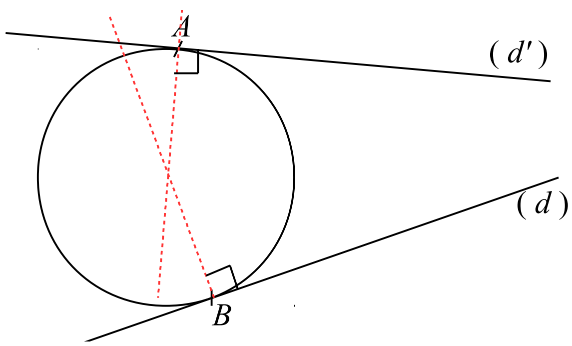


1. On a construit en vert l'ensemble des points situés à 1 cm de la droite (*d*).

2. On a construit en bleu l'ensemble des points situés à 2 cm du point *E*.

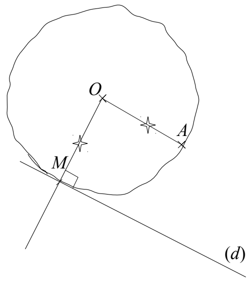
3. Les points situés à la fois à 1 cm de la droite (*d*) et à 2 cm du point *E* existent et se situent à l'intersection du cercle bleu avec la droite verte.

Exercice 15



Exercice 16

1. On veut obtenir un dessin qui ressemble à ça :



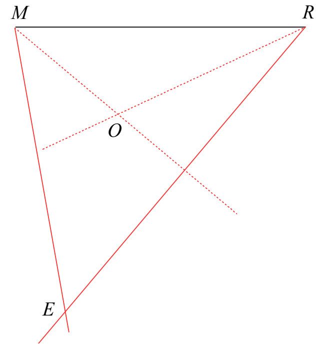
2. Comme O est équidistant de A et M alors O est sur la médiatrice de [AM].

3. Comme (d) est tangente en M au cercle de centre O alors (d) ⊥ (MO).

4. Pour construire le cercle, on trace la perpendiculaire à (*d*) passant par *M*, puis on trace la médiatrice de [*AM*] ; ces deux droites se coupent en *O*. On peut alors tracer le cercle de centre *O* et de rayon *OM*.

Exercice 17

1. Voir ci-contre.



2. Comme *O* est le centre du cercle inscrit au triangle alors (*OM*) et (*OR*) sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{EMR}$ et $\widehat{MRE}$ alors on a $\widehat{EMR}=80°$ et $\widehat{MRE}=50°$.
Comme la somme des angles du triangle *EMR* vaut 180° alors $\widehat{REM}$ mesure 180 – 50 – 80 = 50°.
Comme $\widehat{REM}=50°$ et $\widehat{MRE}=50°$ alors le triangle ***REM* est isocèle de base [*RE*]**.

3. Comme *REM* est isocèle en M alors la bissectrice de $\widehat{REM}$ est confondue avec la médiatrice de [*RE*] donc (*MO*) est la médiatrice de [*RE*].
Comme *O* appartient à la médiatrice de [*RE*] alors ***OE* = *OR***.

Exercice 18

1. Comme *P* et *Q* sont tous les deux équidistants des droites (d_1) et (d_2) alors *P* et *Q* appartiennent à la bissectrice de l'angle formé par ces droites. Comme *A* appartient également à cette bissectrice alors *A*, *P* et *Q* sont alignés.

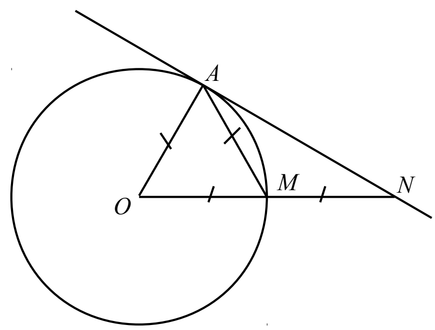
2. Dans le triangle *AEQ*, comme [*DP*] a pour extrémités les milieux des côtés [*AE*] et [*AQ*] alors *EQ* = 2*DP* donc ***EQ* = 7,2 cm**.

Exercice 19

Comme $(UR)\perp(RS)$ et $(UT)\perp(TS)$ alors *UR* est la distance de *U* à (*RS*) et *UT* est la distance de *U* à (*TS*).
Comme la distance de U à (*RS*) est différente de la distance de *U* à (*TS*) alors ***U* n'appartient pas à la bissectrice de** $\boldsymbol{\widehat{RST}}$.

Exercice 20

1. 2. Voir ci-contre.



3. Comme *A* et *M* appartiennent au cercle de centre *O* alors *AO* = *OM*.
Comme *AM* = *OM* alors *OAM* est équilatéral.

Comme *N* est le symétrique de *O* par rapport à *M* alors *OM* = *MN*.

Comme $\widehat{AMO}$ et $\widehat{AMN}$ sont supplémentaires alors $\widehat{AMN}$ mesure 180 – 60 = 120°.

Comme *AMN* est isocèle en *M* alors $\widehat{MAN}$ mesure $\frac{180-120}{2}=30°$.

Comme $\widehat{OAN}=\widehat{OAM}+\widehat{MAN}$ alors $\widehat{OAN}$ mesure 60 + 30 = 90°.

Comme (*OA*) est perpendiculaire à (*AN*) en *A* alors **(*AN*) est la tangente au cercle en *A***.