Sujets d'examen et de contrôle continu de topologie

Année 2007

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques L3

Henri Bonnel

Examen de Topologie

31.07.2007, 8h00-11h00, salle E4

Questions de Cours (8 points)

1. Énoncer et démontrer le théorème de Baire.
2. Énoncer le théorème caractérisant une application linéaire et continue entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Exercice (4 points)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, on considère la partie $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Montrer que S^1 est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que S^1 est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit l'application $g : S^1 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in S^1 \qquad g(x,y) = f(x,y) - f(-x,-y)$$

   (a) Montrer que l'application g est continue sur S^1.
   (b) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ tels que $g(S^1) = [a,b]$, et $a \cdot b \leqslant 0$.
   (c) En déduire qu'il existe un point $(x^*, y^*) \in S^1$ tel que $f(x^*, y^*) = f(-x^*, -y^*)$.

tsvp --→

Problème (8 points)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients réels. Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, $k \in [\![1,n]\!]$ et pour toutes les parties $I = \{i_1,\dots,i_k\} \subset [\![1,n]\!]$, $J = \{j_1,\dots,j_k\} \subset [\![1,n]\!]$ avec $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_k$, on note $A_{IJ} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice $(a_{i_l j_m})_{1\leqslant l,m\leqslant k}$. De même on pose

$$E_{IJ} = \{A \in E|\ \det(A_{IJ}) = 0\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on considère sur $\mathbb{R}^m$ et sur $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la topologie usuelle, i.e. la topologie induite par une norme.

1. Montrer que les applications $p_2 : (x,y) \mapsto xy$ et $s_2 : (x,y) \mapsto x+y$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues.
   En déduire par recurrence que, pour tout entier $m \geqslant 2$, les applications $p_m : (x_1,\dots,x_m) \mapsto x_1\cdots x_m$ et $s_m : (x_1,\dots,x_m) \mapsto x_1+\dots+x_m$ sont continues de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$.
2. Expliquer rapidement pourquoi l'application $A \mapsto \det(A)$ définie de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est continue.
3. Soit $I = \{i_1,\dots,i_k\} \subset [\![1,n]\!]$, $J = \{j_1,\dots,j_k\} \subset [\![1,n]\!]$ avec $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_k$.
   (a) Montrer que l'application $A \mapsto A_{IJ}$ est continue de E dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que l'application $A \mapsto \det(A_{IJ})$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.
   (c) Est-ce que la partie $E_{IJ} = \{A \in E|\ \det(A_{IJ}) = 0\}$ de E est fermée ? (justifier la réponse)
4. Soit $p \in [\![0,n-1]\!]$. On considère les parties suivantes de E :
   $\mathcal{R}_p$ = l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p,
   $\mathcal{R}'_p$ = l'ensemble des matrices de rang strictement supérieur à p,
   $GL_n(\mathbb{R})$ = l'ensemble des matrices inversibles,
   $S_n(\mathbb{R})$ = l'ensemble des matrices symétriques.

   Pour chacune des ces parties préciser (en justifiant la réponse) si elle est ouverte, fermée, compacte.

   (On pourrait commencer par établir une relation entre $\mathcal{R}_p$ et la famille de parties de E de la forme (E_{IJ}) où I et J sont de cardinal strictement supérieur à p....)
5. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E (on pourrait montrer que, si A est une matrice non inversible de E, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la matrice $A + \varepsilon I_n$ est inversible ....).
6. Quelle est l'image de la partie $GL_n(\mathbb{R})$ par l'application det : $E \to \mathbb{R}$.
7. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas une partie connexe de E.
8. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est une partie connexe de E.

Département des
Sciences et Techniques

Année 2007

Licence de Mathématiques L3

Henri Bonnel

Examen de Topologie

21.05.2007, 8h00-11h00, salle F4

Questions de Cours (8 points)

1. Énoncer et démontrer le théorème concernant l'équivalence des normes dans l'espace $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Énoncer le théorème de Baire.
3. Soit C une partie ouverte non vide d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

$$C \text{ est connexe } \iff C \text{ est connexe par arcs.}$$

Exercice 1 (4 points)

Soit E un ensemble contenant au moins deux points distincts et $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ la topologie discrète sur E.

1. Est-ce que l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est connexe ? (Justifier soigneusement la réponse !)
2. Donner une condition nécessaire et suffisante concernant le cardinal de l'ensemble E pour que l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$ soit compact.
3. Est-ce que l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est métrisable[(i)] ? (Justifier soigneusement la réponse !)

Exercice 2 (3 points)

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé.

1. Montrer que l'ensemble $\Delta = \{(x, x) \in E \times E | \ x \in E\}$ est fermé dans $E \times E$ pour la topologie produit.
2. Soit A et B deux parties fermées de l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$. Montrer que $A \times B$ est une partie fermée de $E \times E$ pour la topologie produit. (Indication : on pourrait commencer par exprimer $(A \times B)^c := E \times E \setminus A \times B$ en fonction de A^c et B^c ...)

[(i)] c'est-à-dire il existe une distance sur E qui induit la topologie $\mathcal{O}$

Exercice 3 (3 points)

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Soit f un endomorphisme de E (i.e. une application linéaire de E dans E) et $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f associée à la base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $e_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker).

1. Expliquer rapidement pourquoi l'application f est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer $f(x)$ en fonction de a_{ij} et x_i, $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. En déduire l'expression de $\|f(x)\|_1$ en fonction de a_{ij} et x_i, $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. En particulier, calculer $\|f(e_j)\|_1$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$.
3. Montrer que
$$\|f\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right),$$
où $\|\cdot\|$ représente la norme de l'espace $\mathscr{L}(E, E)$ des applications linéaires et continues de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 4 (5 points)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels. Pour tout élément $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in E$ (avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$), on pose
$$Df = \begin{cases} a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 \quad \text{si } n = 0 \end{cases}$$
et
$$If = a_0X + \frac{a_1}{2}X^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}X^{n+1}.$$
De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note *la valeur de f en t* le nombre réel
$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n,$$
et l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto f(t)$ sera dite la *fonction polynôme associée au polynôme f*. A noter que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Df(t) = f'(t)$ et $If(t) = \int_0^t f(s)ds$.

On définit les applications N_1 et N_∞ de E dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(s)|\, ds, \quad N_\infty(f) = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

1. Montrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.
2. Étudier la continuité de l'application id_E de (E, N_∞) dans (E, N_1). Quelle conclusion peut-on tirer sur les topologies $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_\infty$) induites par N_1 (resp. N_∞) ?
3. Est-ce que les applications $D : f \mapsto Df$ et $I : f \mapsto If$ sont linéaires de E dans E ?
4. Soit $f_n = X^n$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N_\infty(Df_n)$. Quelle conclusion peut-on tirer sur la continuité de l'application $D : (E, N_\infty) \to (E, N_\infty)$?
5. Étudier la continuité de l'application $I : (E, N_\infty) \to (E, N_\infty)$.
6. Étudier la continuité de l'application $I : (E, N_1) \to (E, N_1)$.

$$\text{Note finale} = \min\{20;\ QC + \sum_{i=1}^4 Exo_i\}$$

Département des Sciences et Techniques

Année 2007
Licence de Mathématiques
L3

Contrôle continu de Topologie

du 6 avril 2007, 8h30-11h30, salle A4

Questions de cours (8 points)

I. Définissez les notions suivantes :

1. Point intérieur à une partie A d'un espace métrique.
2. L'adhérence d'une partie d'un espace topologique.
3. Application uniformément continue.
4. Distances topologiquement équivalentes.
5. Distances comparables.
6. Homéomorphisme.
7. Continuité en un point d'une application entre deux espaces topologiques.

II. Énoncer et démontrer le théorème de Heine.

III. Énoncer le théorème caractérisant une application f continue entre deux espaces topologiques. Démontrer l'implication *l'image réciproque par l'application f de tout ouvert est un ouvert $\Longrightarrow$ f est continue.*

IV. Soit K une partie compacte d'un espace topologique séparé E. Démontrer que toute suite de K possède une valeur d'adhérence dans K.

Exercice 1 (4 points)

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On note ∂A la *frontière* de la partie A de E.

1. Montrer que :
   (a) $\partial(\text{int } A) \subset \partial A$;
   (b) $\partial(\bar{A}) \subset \partial A$.
   (c) Donner un exemple dans lequel $\partial(\text{int } A)$, ∂A et $\partial(\bar{A})$ sont trois parties distinctes de E.
2. Montrer que
   (1)
   $$(\bar{A})^c = \text{int } (A^c)$$
   et
   (2)
   $$(\text{int } A)^c = \overline{A^c}.$$
   En déduire que
   $$\partial A = \partial(A^c) = \bar{A} \cap \overline{A^c}.$$

Problème (8 points)

Soit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (on considère partout dans ce problème $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle). On a vu en cours que les applications $d_1 : E \times E \to \mathbb{R}$ et $d_\infty : E \times E \to \mathbb{R}$, données pour tout $(f,g) \in E^2$ par :

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x, \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

sont des distances sur E.

Pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on va noter par $B^1(a;r)$ (resp. $B^1_F(a;r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r dans l'espace métrique (E, d_1), et par $B^\infty(a;r)$ (resp. $B^\infty_F(a;r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r dans l'espace métrique (E, d_∞). L'application nulle de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui est un élément de E, sera notée par 0_E.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Montrer que, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E, d_∞), alors, pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, si on note f la limite dans (E, d_∞) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie, par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] : \qquad f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

(avec la convention $0^0 = 1$).
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \in B^\infty_F(0_E; \frac{1}{4})$.
   (b) Calculer, pour tout $x \in [0,1]$, la limite de la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire (en utilisant aussi le point 1.) qu'il n'existe pas de suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans (E, d_∞).
3. Montrer que dans l'espace métrique (E, d_∞), la partie $B^\infty_F(0_E; \frac{1}{4})$ est fermée et bornée, mais elle n'est pas compacte.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer $d_1(f_n, 0_E)$, où (f_n) est la suite définie au point 2. Quelle conclusion on peut tirer sur la convergence de cette suite dans l'espace (E, d_1) ?
5. Expliquer, en utilisant les points 2.(c) et 4., pourquoi les distances d_1 et d_∞ ne sont pas topologiquement équivalentes.
6. Montrer que l'application $id_E : E \to E$, $id_E(f) = f$ pour tout $f \in E$, est 1-lipschitzienne de (E, d_∞) dans (E, d_1).
   En déduire la relation entre $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^\infty$, où $\mathcal{O}^1$ est la topologie de (E, d_1) et $\mathcal{O}^\infty$ la topologie de (E, d_∞). Est-ce-que id_E est un homéomorphisme de (E, d_∞) dans (E, d_1) ?
7. Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et pour tout $f \in E$ on pose $p_\alpha(f) = f(\alpha)$.
   (a) Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'application $p_\alpha : (E, d_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue (indication : on pourrait utiliser le point 1. et la caractérisation séquentielle de la continuité en un point).
   (b) En déduire que l'ensemble $A = \{f \in E | \forall x \in [0,1] :\ f(x) \geqslant 0\}$ des fonctions positives de E est une partie fermée de (E, d_∞).
   (c) Montrer que l'ensemble $B = \{f \in E | \forall x \in [0,1] :\ f(x) > 0\}$ des fonctions strictement positives de E est une partie ouverte de (E, d_∞) (indication : pour tout $f \in B$, considérer $B^\infty(f; \frac{\alpha}{2})$, où $\alpha = \min f([0,1])$ ....).

Année 2006

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques L3

Henri Bonnel

Examen de Topologie

23.05.2006, 8h00-11h00, salle E6

Questions de Cours. (8 points)

1. Énoncer et démontrer le théorème du point fixe de Banach-Picard-Cacciopolli.
2. Énoncer le théorème de Baire.
3. Donner plusieurs définitions équivalentes de la norme d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.
4. Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) vérifiant la propriété suivante :

$$\textit{il existe } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \textit{ tel que } \|\cdot\|_1 \leqslant \alpha \cdot \|\cdot\|_2.$$

   Établir une relation entre les topologies $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ associées respectivement aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice (4 points)

Soient A et B deux parties d'un espace topologique E.

1. Montrer que $A \cup B = [A \cup (\bar{A} \cap B)] \cup B$.
2. En déduire que, si A et B sont connexes et $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe (justifier soigneusement la réponse).

Problème (10 points)

Introduction. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réels des polynômes à coefficients réels. Donc, tout élément $P \in E$ s'écrit sous la forme

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie de $\mathbb{R}$. On vous rappelle que cet espace contient une famille libre infinie $(1, X, X^2, \ldots) = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc il n'est pas de dimension finie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va noter $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E ayant comme éléments les polynômes de degré au plus n. On vous rappelle que la dimension de E_n est égale à $n + 1$.

On considère les applications suivantes $N_1,\ N_\infty,\ N_{jet},\ : E \to \mathbb{R}$, définies, pour tout $P \in E$, par :

$$N_1(P) = \int_0^1 |P(t)| dt, \qquad N_\infty(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|, \qquad N_{jet}(P) = \sum_{i=0}^{+\infty} |P^{(i)}(0)|$$

où $P^{(i)}$ représente le polynôme dérivée $i^{\text{ème}}$ de P.

Les questions 5. et 6. de la deuxième partie sont indépendantes et n'utilisent pas les résultats des questions 2. 3. et 4.

Première partie

1. (a) Expliquer pourquoi l'application $t \mapsto P(t)$ est intégrable sur $[0, 1]$, autrement dit, pourquoi N_1 est bien définie.
   (b) Expliquer pourquoi le «sup» utilisé pour définir N_∞ existe dans $\mathbb{R}$.
   (c) Expliquer pourquoi la série définissant $N_{jet}(P)$ converge.
   (d) Montrer que N_1, N_∞ et N_{jet} sont des normes sur E.
2. Considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par $P_n(X) = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans l'espace vectoriel normé (E, N_1) ? Dans (E, N_∞) ? Dans (E, N_{jet}) ? (Justifier les réponses !)
   (b) La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée dans (E, N_1) ? Dans (E, N_∞) ? Dans (E, N_{jet}) ? (Justifier les réponses !)
   (c) Peut-on extraire une sous-suite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit convergente dans (E, N_1) ? Dans (E, N_∞) ? Dans (E, N_{jet}) ? (Justifier les réponses !)
3. On se propose de comparer les topologies définies par les 3 normes.
   (a) Montrer que
   $$N_1 \leqslant N_\infty \leqslant N_{jet}. \tag{3}$$
   (b) En déduire une relation entre les topologies $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_{jet}$ associées respectivement à N_1, N_∞ et N_{jet}.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas un réel positif α tel que $N_{jet} \leqslant \alpha \cdot N_\infty$ ou $N_\infty \leqslant \alpha \cdot N_1$. (On pourrait utiliser la suite (P_n) du point précédent)
   (d) En déduire que les topologies $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_{jet}$ sont distinctes deux à deux (justifier la réponse).
4. On considère les applications $f, g : E \to E$ définies pour tout $P \in E$ par
   $$f(P) = P'; \qquad g(P) = Q, \text{ où } Q(t) = \int_0^t P(s)ds \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Expliquer rapidement pourquoi ces applications sont bien définies.
   (b) Montrer que f et g sont des application linéaires.
   (c) Étudier la continuité des applications :
      i. $f : (E, N_\infty) \to (E, N_1)$;
      ii. $f : (E, N_1) \to (E, N_\infty)$;
      iii. $f : (E, N_\infty) \to (E, N_\infty)$;
      iv. $g : (E, N_\infty) \to (E, N_\infty)$;
      v. $g : (E, N_1) \to (E, N_\infty)$.

Deuxième partie

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $C_n > 0$ tel que, pour tout $P \in E_n$ on ait
   $$C_n^{-1} N_\infty(P) \leqslant N_{jet}(P) \leqslant C_n \cdot N_\infty(P).$$
   (b) En déduire que, pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$ et $P \in E_n$, on ait
   $$C_n^{-1} \sup_{t\in[-\lambda,\lambda]} |P(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \lambda^i |P^{(i)}(0)| \leqslant C_n \sup_{t\in[-\lambda,\lambda]} |P(t)|$$
6. Dans cette question N désigne une norme arbitraire sur E.
   (a) Expliquer pourquoi les espaces E_n, $n \in \mathbb{N}$ sont des parties fermées de (E, N).
   (b) Expliquer pourquoi l'intérieur de E_n est vide dans (E, N).
   (c) Calculer
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$
   (d) En déduire que (E, N) n'est pas complet (expliquer soigneusement le résultat).

   En conclusion, vous avez montré (espérons-le !) que *dans l'espace des polynômes il n'existe pas de norme le rendant complet !*

Note finale = min{20; QC+Exo+Problème}

Année 2006

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques L3

Henri Bonnel

Examen de Topologie

01.08.2006, 8h00-11h00, salle E6

Questions de Cours. (8 points)

1. Énoncer le théorème sur les propriétés des espaces métriques complets.
2. Énoncer le théorème de Weierstrass-Bolzano concernant les espaces métriques compacts.
3. Démontrer la propriété :

$$(E,d) \text{ est un espace métrique compact} \implies (E,d) \text{ est un espace métrique complet.}$$

4. Comment on définit la topologie de l'espace dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ?

Exercice I. (7 points)

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}[X]$ des applications polynomiales réelles. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $P \in E$ on pose $\delta_a(P) = P(a)$.

1. Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par

$$N(P) = \sup_{t \in]0,1[} |P(t)|,$$

est bien définie et qu'elle est une norme sur E.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\delta_a : E \to \mathbb{R}$ est linéaire.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\delta_a : E \to \mathbb{R}$ est continue de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ si et seulement si a est un point adhérent à $]0, 1[$.
4. Etudier la continuité de (E, N) dans (E, N) des endomorphismes $D : E \to E$ et $I : E \to E$ définis par

$$\forall P \in E,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad D(P)(t) = P'(t), \qquad I(P)(t) = \int_0^t P(s)ds.$$

Que dire sur la continuité de $D \circ I$ et de $I \circ D$?

t.s.v.p.

Exercice II. (7 points)

Soit $(E,\ \mathrm{d})$ un espace métrique. Pour toute partie non vide A de E, et pour tout $x \in E$ on pose

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\ \mathrm{d}(x, y) |\ y \in A\}.$$

1. Montrer que pour toute partie bornée, non vide X de $\mathbb{R}$ on a

   $$\inf X \in \bar{X}.$$

   En déduire que, pour toute partie non vide A de E

   $$\mathrm{d}(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}. \tag{4}$$

2. Montrer que pour A fixé, l'application $x \mapsto\ \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne sur E.
3. Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que l'on a

   $$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset \Longleftrightarrow \text{ il existe deux ouverts disjoints } U \text{ et } V \text{ de } E \text{ tels que } A \subset U \text{ et } B \subset V.$$

   Indication. Pour l'implication «$\Longrightarrow$» on pourrait considérer l'application $x \mapsto\ \mathrm{d}(x, A) -\ \mathrm{d}(x, B)$.

4. Soient A et B deux fermés de E, non vides et disjoints. Montrer qu'il existe une application continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(A) = \{0\}$ et $\varphi(B) = \{1\}$. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Note finale = min{20; QC+ Exo 1+ Exo 2}

Département des
Sciences et Techniques

Année 2006
Licence de Mathématiques
L3

Contrôle continu de Topologie

du 23 mars 2006 (durée : 3 heures)

Questions de cours (8 points)

I. Définissez les notions suivantes :

1. Partie ouverte d'un espace métrique.
2. Voisinage d'un point dans un espace topologique.
3. Application entre deux espaces topologique continue en un point.
4. Application ouverte.
5. Distances comparables.

II. Énoncer le théorème sur les propriétés des compacts dans un espace topologique, et démontrer **une seule** des propriétés.

III. Soit f une application continue définie sur un espace topologique séparé compact $(E, \mathcal{O})$ à valeur dans un espace topologique séparé $(E', \mathcal{O}')$.

1. Montrer que f est fermée.
2. Montrer que, si l'application f est en plus une bijection, alors f est ouverte. Dans ce cas f est-elle un homéomorphisme ?

IV. Soit d et d' deux distances sur un ensemble non vide E. Donner les définitions suivantes :

(A) d et d' sont comparables.

(B) d et d' sont topologiquement équivalentes.

Quelle relation on a entre les assertions **(A)** et **(B)** ? Démontrez cette relation !

Exercice 1 (6 points)

Soit (E, d) un espace métrique. On note $B(a; r)$ la boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ de l'espace (E, d).

On considère l'application $\delta : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $(x, y) \in E \times E$ par :

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

1. Montrer que l'application $f : t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie la relation suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 : \qquad f(a + b) \leqslant f(a) + f(b).$$

2. En déduire que δ est une distance sur E.

   Dans la suite on note $B'(a; r)$ la boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ de l'espace métrique (E, δ).
3. Montrer qu'en général d et δ ne sont pas comparables.

4. Établir une inégalité entre d et δ. En déduire une relation entre $B(a;r)$ et $B'(a;r)$.
5. Soit un réel $r \in]0,1[$. En déduire une relation entre $B'(a;r)$ et $B(a;\frac{r}{1-r})$.
6. En utilisant les résultats obtenus aux deux derniers points, montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes.
7. Dans ce point on suppose (E,d) un espace métrique non bornée (par exemple $E = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle : $d(x,y) = |x-y|$). Soit un point $a \in E$ fixé. Déterminer la boule $B'(a;1)$. L'espace (E,δ) est-il borné ?

Exercice 2 (4 points)

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et K une partie compacte de E.

1. Montrer que pour tout point $x \in E \setminus K$ il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $K \subset U$ et $x \in V$.
2. En déduire que, pour tout compact K' disjoint de K, il existe deux ouverts disjoints O et O' tels que $K \subset O$ et $K' \subset O'$.

Exercice 3 (4 points)

Soit (K,d) un espace métrique compact et f une application de K dans K telle que, pour tout $(x,y) \in K^2$ on ait

$$x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

1. Expliquer pourquoi f est une application uniformément continue.
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(f(x), x)$ est une application continue de (K,d) dans $\mathbb{R}$ (avec la topologie usuelle).
3. En déduire l'existence d'un élément unique $a \in K$ tel que $f(a) = a$.

Note finale = $\min\{20,\ QC + E1 + E2 + E3\}$.

Année 2005

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques L3

Henri Bonnel

Examen de Topologie

25.05.2005, 8h30-11h30, E6

Questions de Cours. (10 points)

1. Dans cette partie on se propose de caractériser les parties compactes de l'espace métrique produit $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ munis des métriques usuelles.
   (a) **Énoncer** la propriété caractérisant les parties compactes de l'espace métrique $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ avec $d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) En utilisant le point précédent, donner, **en justifiant la réponse,** la propriété caractérisant les parties compactes de l'espace métrique produit $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, de la famille $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})_{1 \leqslant k \leqslant n}$, où la distance produit d_1 est définie par :
   $$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$
   (c) Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \mathfrak{I}(x_1, x_2) = x_1 + ix_2$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant
   $$\frac{1}{2} d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \leqslant |\mathfrak{I}(x_1,x_2) - \mathfrak{I}(y_1,y_2)| \leqslant d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)).$$
   En déduire que $\mathfrak{I}$ est un homéomorphisme entre les espaces métriques $(\mathbb{R}^2, d_1)$ et $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$, où
   $$d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \ \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$
   De plus, pour toute partie bornée A de $(\mathbb{R}^2, d_1)$, on a $\mathfrak{I}(A)$ est bornée dans $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$, et, pour toute partie bornée B de $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$, on a $\mathfrak{I}^{-1}(B)$ bornée dans $(\mathbb{R}^2, d_1)$.
   En déduire la propriété caractérisant les parties compactes de $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$.
   (d) Notons δ_1 la distance produit de $\mathbb{C}^n$, i.e., pour tout $(z, z') = ((z_1, \dots, z_n), (z'_1, \dots, z'_n)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$,
   $$\delta_1(z, z') = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z'_k|.$$
   Montrer que, pour toute boule fermée $B_F(a; r)$ de $(\mathbb{C}^n, \delta_1)$ (avec $a \in \mathbb{C}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$), on a
   $$B_F(a;r) \subset B_F(0_{\mathbb{C}^n}; r + \delta_1(a; 0_{\mathbb{C}^n})).$$
   Posons $R = r + \delta_1(a; 0_{\mathbb{C}^n})$ et $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant R\}$ (le disque fermé de centre 0 et de rayon R de $\mathbb{C}$). Montrer que
   $$B_F(0_{\mathbb{C}^n}; R) \subset D_R^n = \underbrace{D_R \times \ldots \times D_R}_{n \text{ fois}},$$
   donc
   $$B_F(a;r) \subset D_R^n.$$
   (e) En déduire la caractérisation des parties compactes de l'espace métrique produit $(\mathbb{C}^n, \delta_1)$.
2. Énoncer le théorème sur l'équivalence des normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Énoncer le théorème caractérisant les applications linéaires et continues entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
3. Démontrer selon vos préférences un des théorèmes énoncés ci-dessus.
4. Montrer que le théorème sur l'équivalence des normes n'est pas valable en dimension infinie (on pourrait considerer la suite $(f_n : t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1]; \mathbb{R})$ avec les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$).

Exercice (6 points)

Les questions 1. 2. et 3. sont indépendantes !

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note par $\mathcal{O}$ la topologie de E associée à la norme $\|\cdot\|$, et pour toute partie A de E, on note $\mathcal{O}_A = \{O \cap A | \, O \in \mathcal{O}\}$ la topologie induite sur A par celle de E. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'adhérence de l'ensemble $\{x \in E | \, \|x-a\| < r\}$ est l'ensemble $\{x \in E | \, \|x-a\| \leqslant r\}$. Comment appelle-t-on ces ensembles ?
2. Montrer que l'intérieur de l'ensemble $\{x \in E | \, \|x-a\| \leqslant r\}$ est l'ensemble $\{x \in E | \, \|x-a\| < r\}$.
3. Soit K une partie compacte de E et f une application continue de $(K, \mathcal{O}_K)$ dans $(E, \mathcal{O})$.
   (a) Montrer que l'application f est fermée.
   (b) Si, de plus, f est injective, montrer que les sous-espaces topologiques $(K, \mathcal{O}_K)$ et $(f(K), \mathcal{O}_{f(K)})$ sont homéomorphes.

Problème (8 points)

Introduction. Dans ce problème les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de leurs topologies usuelles. On considère un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une application continue $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$. De plus, on suppose l'existence d'un réel strictement positif L tel que, pour tous les réels t, x, y, on ait

$$(t,x), (t,y) \in \Omega \implies |\Phi(t,x) - \Phi(t,y)| \leqslant L|x-y|. \tag{5}$$

Considérons *l'équation différentielle non-linéaire du premier ordre*

$$x' = \Phi(t,x) \tag{E}$$

On appellera *solution de* (E) toute application dérivable $\varphi : I_\varphi \to \mathbb{R}$ avec I_φ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, telle que, pour tout $t \in I_\varphi$, on ait

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = \Phi(t, \varphi(t)).$$

Dans la suite on se propose de démontrer le théorème suivant.

> **Théorème de Cauchy-Lipschitz.** *Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$.
>
> I. Existence. *Il existe un réel $a > 0$ et une solution φ de* (E) *définie sur $I_\varphi = [t_0 - a, t_0 + a]$ vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.*
>
> II. Unicité. *Si $\psi : I_\psi \to \mathbb{R}$ est une solution de* (E) *telle que $t_0 \in \operatorname{int}(I_\psi)$ et $\psi(t_0) = x_0$, il existe $a' > 0$ tel que, pour tout $t \in I_\varphi \cap I_\psi \cap [t_0 - a', t_0 + a']$, on ait $\varphi(t) = \psi(t)$.*

Résultats préliminaires.

Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que le pavé $K = [t_0 - a_0, t_0 + a_0] \times [x_0 - b_0, x_0 + b_0]$ soit inclus dans Ω (justifier sur une ligne l'existence de a_0 et b_0 !). Pour tout $a \in]0, a_0]$ on va noter E_a le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur le segment $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ de $\mathbb{R}$, i.e. $E_a = \mathscr{C}(I_a, \mathbb{R})$. Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in I_a} |f(t)|$, on a vu en cours que $(E_a, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. On va noter par d_∞ la distance associée, i.e. $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$, pour tout $(f,g) \in E_a^2$. On va considérer la partie $F_a = \mathscr{C}(I; [x_0 - b_0, x_0 + b_0]) = \{f \in E_a | \, f(I_a) \subset [x_0 - b_0, x_0 + b_0]\}$ de E_a et l'application $T_a : F_a \to E_a$ définie, pour tout $f \in F_a$, par :

$$\forall t \in I_a, \qquad T_a(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s, f(s)) \, \mathrm{d}s.$$

La preuve du théorème .

1. Soit $f \in F_a$. Montrer (rapidement) que f est une solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(t_0) = x_0$ si, et seulement si, on a $T_a(f) = f$.
2. Montrer que F_a est une partie fermée de (E_a, d_∞). En déduire que l'espace métrique (F_a, d_a) est complet, où d_a est la restriction de d_∞ à $F_a \times F_a$.

3. Montrer qu'il existe un réel positif M tel que $\sup_{(t,x)\in K} |\Phi(t,x)| \leqslant M$.
4. Supposons que le nombre $a \in]0, a_0]$ vérifie la condition

   (6) $$a \leqslant \frac{b_0}{M}.$$

   Montrer que
   $$T_a(F_a) \subset F_a.$$
5. Supposons que, en plus de (6), le nombre $a \in]0, a_0]$ vérifie également la condition suivante :

   (7) $$a < \frac{1}{L}.$$

   Montrer que l'application $f \mapsto T_a(f)$ est une contraction de F_a dans F_a.
6. Montrer que, en prenant $a = \min\{\frac{1}{2L}, \frac{b_0}{M}, a_0\}$, on a $a \in]0, a_0]$ et les conditions (6), (7) sont vérifiées.

   En déduire la conclusion de la première partie (existence) du théorème de Cauchy-Lipschitz.
7. Soit le réel $a' \in]0, a]$ tel que $[t_0 - a', t_0 + a'] \subset I_\psi$. Montrer, en utilisant les points précédents, que l'application $f \mapsto T_{a'}(f)$ est une contraction de $F_{a'}$ dans $F_{a'}$ et que les restrictions de φ et ψ à $[t_0 - a', t_0 + a']$ sont des points fixes de cette contraction.

   En déduire la conclusion de la deuxième partie du théorème.

Note finale = min{20; QC+Exo+Problème}

BON COURAGE!

Année 2005

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques L3

Henri Bonnel

Examen de Topologie

(2-ème session) 26.09.2005, 8h30-11h30, E6

Questions de Cours. (8 points)

1. Définissez les notions suivantes :
   (i) Partie ouverte d'un espace métrique (E, d).
   (ii) La topologie d'un sous-espace topologique.
   (iii) La topologie produit d'une famille d'espaces topologiques.
   (iv) Partie connexe d'un espace topologique.
   (v) La topologie de l'espace dual d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

2. Énoncer le théorème concernant les propriétés des parties connexes d'un espace topologique.
3. Démontrer que, si A est une partie connexe d'un espace topologique E et B est une partie de E telle que $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est une partie connexe de E.

Exercice (6 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E.

1. Montrer que, si A est une partie compacte et B est une partie fermée, alors la partie $C = A + B$, i.e. $C = \{a + b | \, a \in A, \ b \in B\}$, est fermée.
2. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple (vous pouvez vous placer dans $\mathbb{R}$), que la condition *«A partie compacte»* ne peut pas être remplacée, dans le point précédent, par la condition plus faible *«A partie fermée»* , i.e. on peut trouver deux parties fermés A et B telles que la partie $A + B$ ne soit pas fermée.
3. Montrer que, si les deux parties A et B sont compactes, alors la partie $C = A + B$ est compacte.
4. Supposons maintenant que la partie A est ouverte (B quelconque). Montrer alors que la partie $A + B$ est ouverte (vous pouvez commencer par le cas où $B = \{b\}$ est un singleton).
5. Dans ce point on considère un sous-espace vectoriel F de E.
   (a) Montrer que, si F est une partie ouverte de E, alors $F = E$.
   (b) Montrer que F est une partie connexe de E.

TSVP →

Problème (8 points)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients réels. On considère sur E la topologie d'espace vectoriel normé. Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$, $k \in [\![1,n]\!]$ et pour toutes les parties $I = \{i_1, \ldots, i_k\},\ J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [\![1,n]\!]$ avec $i_1 < \cdots < i_k,\ j_1 < \cdots < j_k$, on note $A_{IJ} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice $(a_{i_l j_m})_{1 \leqslant l,m \leqslant k}$.

1. Est-ce que la topologie de E dépend de la norme utilisée sur E (justifier la réponse) ?
2. Montrer que les applications $p_2 : (x,y) \mapsto xy$ et $s_2 : (x,y) \mapsto x+y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues (pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$). Montrer ensuite par recurrence que, pour tout entier $k \geqslant 2$, les applications $p_k : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 \cdots x_k$ et $s_k : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 + \cdots + x_k$ sont continues de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que, pour $I = \{i_1, \ldots, i_k\},\ J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset [\![1,n]\!]$ avec $i_1 < \cdots < i_k,\ j_1 < \cdots < j_k$, l'application $A \mapsto \det(A_{IJ})$ est continue de E dans $\mathbb{R}$ et les parties $E_{IJ} = \{A \in E |\ \det(A_{IJ}) = 0\}$ de E sont fermées.
4. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. On considère les parties suivantes de E :
   $\mathcal{R}_p$ = l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p,
   $\mathcal{R}'_p$ = l'ensemble des matrices de rang strictement supérieur à p,
   $GL_n(\mathbb{R})$ = l'ensemble des matrices inversibles,
   $S_n(\mathbb{R})$ = l'ensemble des matrices symétriques.

   Pour chacune des ces parties préciser (en justifiant la réponse) si elle est ouverte, fermée, compacte.
5. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E (on pourrait montrer que, si A est une matrice non inversible de E, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la matrice $A + \varepsilon I_n$ est inversible ....).
6. Étudier si $GL_n(\mathbb{R})$ et/ou $S_n(\mathbb{R})$ sont des parties connexes de E.

Note finale = min{20; QC+Exo +Problème}

BON COURAGE!

Année 2005

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques

L3

Contrôle continu de Topologie

du 24 mars 2005 (durée : 3 heures)

Questions de cours (10 points)

I. Définissez les notions suivantes :

1. L'intérieur d'une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$.
2. L'adhérence d'une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$.
3. La frontière d'une partie d'un espace topologique.
4. Isométrie entre deux espaces métriques.
5. Espaces topologiques homéomorphes.
6. Sous-espace topologique.

II. Énoncer le théorème sur la caractérisation d'une application continue entre deux espaces topologiques.
Démontrer **une seule implication** (à votre choix !) de ce théorème.

III. Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie non vide de E, $\mathcal{O}_A$ la topologie induite sur A par celle de E et $i_A : A \to E$ l'injection canonique (i.e. $i_A(x) = x$ pour tout $x \in A$).

1. Montrer que i_A est continue de $(A, \mathcal{O}_A)$ dans $(E, \mathcal{O})$.
2. Donner des conditions suffisantes vérifiées par A pour que i_A soit une application ouverte (resp. fermée) de $(A, \mathcal{O}_A)$ dans $(E, \mathcal{O})$.

IV. Montrer que, dans tout espace métrique, toute boule fermée est une partie fermée.

Problème (12 points)

Soit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (on considère partout dans ce problème $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle). On définit les applications $d_1 : E \times E \to \mathbb{R}$ et $d_\infty : E \times E \to \mathbb{R}$, données pour tout $(f,g) \in E^2$ par :

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x, \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Compte tenu du point 1. ci-dessous, pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on va noter par $B^1(a;r)$ (resp. $B^1_F(a;r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r dans l'espace métrique (E, d_1), et par $B^\infty(a;r)$ (resp. $B^\infty_F(a;r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r dans l'espace métrique (E, d_∞). L'application nulle de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui est un élément de E, sera notée par 0_E.

1. Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur E (en expliquant pourquoi elle sont bien définies).
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Montrer que, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E, d_∞), alors, pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, si on note f la limite dans (E, d_∞) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

3. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie, par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] : \qquad f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

(avec la convention $0^0 = 1$).

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \in B_F^\infty(0_E; \frac{1}{4})$.

   (b) Calculer, pour tout $x \in [0,1]$, la limite de la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) En déduire (en utilisant aussi le point 2.) qu'il n'existe pas de suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans (E, d_∞).

4. Montrer que dans l'espace métrique (E, d_∞), la partie $B_F^\infty(0_E; \frac{1}{4})$ est fermée et bornée, mais elle n'est pas compacte.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer $d_1(f_n, 0_E)$, où (f_n) est la suite définie au point 3. Quelle conclusion on peut tirer sur la convergence de cette suite dans l'espace (E, d_1) ?

6. Expliquer, en utilisant les points 3.(c) et 5., pourquoi les distances d_1 et d_∞ ne sont pas équivalentes.

7. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \in [\dfrac{1}{n+1}, 1] \\ \\ (n+1)^2 \left(\dfrac{1}{n+1} - x\right) \quad \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{n+1}[. \end{cases}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n \in E$.

   (b) Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B_F^1(0_E; 1/2)$.

   (c) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que, si $(g_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E, d_1) vers $g \in E$, alors, pour tout $x \in]0,1]$ on a $g(x) = 0$ (indication : on pourrait raisonner par l'absurde !). En déduire que $g = 0_E$.

   (d) En utilisant le dernier résultat, montrer qu'il n'existe pas de suite extraite de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans (E, d_1). En déduire que la partie $B_F^1(0_E; 1/2)$ n'est pas compacte dans (E, d_1).

8. Montrer que l'application $id_E : E \to E,\ id_E(f) = f$ pour tout $f \in E$, est 1-lipschitzienne de (E, d_∞) dans (E, d_1). En déduire la relation entre $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^\infty$, où $\mathcal{O}^1$ est la topologie de (E, d_1) et $\mathcal{O}^\infty$ la topologie de (E, d_∞). Est-ce-que id_E est un homéomorphisme de (E, d_∞) dans (E, d_1) ?

9. Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et pour tout $f \in E$ on pose $p_\alpha(f) = f(\alpha)$.

   (a) Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'application $p_\alpha : (E, d_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue (indication : on pourrait utiliser le point 2. et la caractérisation séquentielle de la continuité en un point).

   (b) En déduire que l'ensemble $A = \{f \in E | \forall x \in [0,1] :\ f(x) \geqslant 0\}$ des fonctions positives de E est une partie fermée de (E, d_∞).

   (c) Montrer que l'ensemble $B = \{f \in E | \forall x \in [0,1] :\ f(x) > 0\}$ des fonctions strictement positives de E est une partie ouverte de (E, d_∞) (indication : pour tout $f \in B$, considérer $B^\infty(f; \frac{\alpha}{2})$, où $\alpha = \min f([0,1])$ ....).

10. Montrer que l'ensemble A défini au point précédent est fermé également dans (E, d_1), mais B n'est pas ouvert dans (E, d_1).

Année 2004

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques

H. Bonnel

Examen de Topologie

seconde session, mardi 5 octobre 2004 (14h-17h, salle E6)

Questions de cours (10 points)

1. Définissez les notions suivantes :
   (i) Partie ouverte d'un espace métrique (E, d).
   (ii) Distances topologiquement équivalentes et distances comparables sur un espace métrique.
   (iii) Continuité en un point d'une application entre deux espaces métriques.
   (iv) Partie compacte d'un espace topologique.
   (v) La topologie de l'espace dual d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

2. Énoncer et démontrer le théorème du point fixe de Picard-Banach-Cacciopolli.

Exercice I. (6 points)

On considère les $\mathbb{R}$-espaces de Banach :

- $l^2 = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < +\infty\}$ muni de la norme

$$\forall u \in l^2 : \qquad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2},$$

- $l^\infty = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty\}$ muni de la norme

$$\forall u \in l^\infty : \qquad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

On note $B_2(a; r)$ la boule ouverte de centre $a \in l^2$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace l^2, et $B_\infty(a; r)$ la boule ouverte de centre $a \in l^\infty$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace l^∞.
On pose $l^2_+ = \{u \in l^2 | \; u_n \geqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ et $l^\infty_+ = \{u \in l^\infty | \; u_n \geqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $a \in l^2_+$. Montrer que, pour tout $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p < r/2$. En déduire que l'élément $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \neq p \\ -\dfrac{r}{2} & \text{si } n = p \end{cases}$$

   appartient à la boule ouverte $B_2(a; r)$ de l^2.

   Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'intérieur de la partie l^2_+ de l^2 ?

2. Soit $e \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par $e_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $e \in l^\infty_+$ et que $B_\infty(e;1) \subset l^\infty_+$.
3. Montrer que l'intérieur de l^∞_+, noté int (l^∞_+) est donné par

$$\text{int }(l^\infty_+) = \{u \in l^\infty_+ |\ \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n > 0\}.$$

   La partie $A = \{u \in l^\infty |\ u_n > 0 \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ est-elle ouverte dans l^∞ ?
4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les applications $\pi_2^p : l^2 \to \mathbb{R}$ et $\pi_\infty^p : l^\infty \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall u \in l^2 : \ \ \pi_2^p(u) = u_p; \qquad\qquad \forall v \in l^\infty : \ \ \pi_\infty^p(v) = v_p$$

   sont linéaires et continues ($\mathbb{R}$ est considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé) et préciser leurs normes. En déduire que l^2_+ est une partie fermée de l^2 et l^∞_+ est une partie fermée de l^∞.
5. (a) Montrer que $l^2 \subset l^\infty$ (inclusion d'ensembles).
   (b) Ainsi on considère l'injection canonique $i : l^2 \to l^\infty$ définie par $i(u) = u$ pour tout $u \in l^2$. Montrer que i est continue.
6. Considérons la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ de l^2 définie, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, par l'élément $u^{(p)} = (u_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_n^{(p)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \text{si } n \leqslant p \\ \\ 0 & \text{si } n > p. \end{cases}$$

   Montrer que la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans l^2, mais la suite $(i(u^{(p)}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans l^∞.

Exercice II. (6 points)

Soient (E,d), (E',d') deux espaces métrique et $f : E \to E'$ une application. On note $G_f = \{(x, f(x)) \in E \times E' |\ x \in E\}$ le graphe de f.

1. Montrer que, si $f : (E,d) \to (E',d')$ est continue, alors G_f est une partie fermée dans l'espace métrique produit $E \times E'$.
2. Supposons (E',d') espace métrique compact et G_f fermé dans $E \times E'$. Montrer que f est continue.
3. Donner un exemple où E' n'est pas compact, G_f est fermé dans $E \times E'$ et f n'est pas continue.

Année 2004

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques

Henri Bonnel

Examen de Topologie 26.05.2004

Durée : 3 h

Questions du Cours. (10 points)

1. Énoncer les propriétés des espaces métriques complets.
2. Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.
3. Énoncer le théorème sur les propriétés des parties connexes d'un espace topologique et démontrer une de ces propriétés.

Exercice 1 (5 points)

On considère la partie $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle (induite par la métrique euclidienne).

1. Montrer que S^1 est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que S^1 est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une application continue.
   (i) Montrer que l'application $g : S^1 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in S^1$ par
   $$g(x,y) = f(x,y) - f(-x,-y)$$
   est continue sur S^1.
   (ii) Montrer que $a = \inf g(S^1)$ et $b = \sup g(S^1)$ sont des nombres réels (finis), $g(S^1) = [a,b]$, et $a \cdot b \leqslant 0$.
   (iii) En déduire qu'il existe un point $(x^*, y^*) \in S^1$ tel que $f(x^*, y^*) = f(-x^*, -y^*)$.

Exercice 2 (4 points)

1. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé. Montrer que l'ensemble $\Delta = \{(x,x) \in E \times E |\, x \in E\}$ est fermé dans $E \times E$ pour la topologie produit.
2. Soit $(F, \mathcal{G})$ un espace topologique muni de la topologie grossière.
   (a) Préciser la topologie produit de $F \times F$.
   (b) La partie $\Delta = \{(x,x) \in F \times F |\, x \in F\}$ est-elle fermée dans $F \times F$ pour la topologie produit ?

Exercice 3 (5 points)

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme N_∞ définie par $f \mapsto N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On accepte que (E, N_∞) est un espace de Banach.

Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une application non nulle, continue (en considérant sur $[0,1] \times [0,1]$ la topologie induite pas celle de $\mathbb{R}^2$ (en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé), et sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle).
Soit $\varphi \in E$ fixé. Considérons, pour chaque réel λ, l'application $T_\lambda : (E, N_\infty) \to (E, N_\infty)$ définie par

$$\forall f \in E \ \ \forall x \in [0,1] \qquad (T_\lambda(f))(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y) \ \mathrm{d}y + \varphi(x).$$

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application T_λ est bien définie, i.e. $f \in E \Longrightarrow T_\lambda(f) \in E$.

2. Montrer qu'il existe $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$ tel que,

   (8) $$\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \qquad |K(a,b)| \geqslant |K(x,y)|,$$

   et $|K(a,b)| > 0$.

3. Montrer que pour tout réel λ vérifiant

   (9) $$|\lambda| < \frac{1}{|K(a,b)|},$$

   (où l'élément (a,b) vérifie (8)), l'application T_λ est une contraction.

   En déduire que, dans ce cas, l'équation d'inconnue $f \in E$:

   $$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y) \ \mathrm{d}y + \varphi(x),$$

   admet une solution unique.

Année 2004

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques
TOP

Contrôle continu de Topologie

du 23 mars 2004 (durée : 2 heures)

Questions du cours (7 points)

I. Définissez les notions suivantes :

1. Partie ouverte d'un espace métrique (E, d).
2. L'intérieur d'une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$.
3. Point adhérent à une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$.
4. La frontière d'une partie d'un espace topologique.
5. Application entre deux espaces topologiques continue en un point.
6. Espace topologique séparé.
7. Espace topologique compact.
8. Partie compacte d'un espace topologique.

II. Énoncer et démontrer le théorème de Heine.

Problème (9 points)

Sur le produit des espaces compacts

Soit (E, d) un espace métrique. Dans la suite $\mathbb{R}$ désigne l'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ où $\delta(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ est la métrique usuelle. On pose $\bar{E} = E \times E$, et on définit l'application $\bar{d} : \bar{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \bar{x} = (x_1, x_2),\ \bar{y} = (y_1, y_2) \in \bar{E} \qquad \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2).$$

1. (a) Montrer que $\bar{d}$ est une distance sur $\bar{E}$ (appelée «métrique produit»).
   (b) Montrer que l'application d est continue de $(\bar{E}, \bar{d})$ dans $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que, pour tout $a \in E$ fixé, l'application $i_a : x \mapsto (x, a)$ est une isométrie de (E, d) dans $(\bar{E}, \bar{d})$. De même pour l'application $j_a : y \mapsto (a, y)$.
   (d) En déduire que pour tout $a \in E$ fixé, l'application $x \mapsto d(x, a)$ est continue de (E, d) dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les applications p_1, p_2 définies par

   $$\forall \bar{x} = (x_1, x_2) \in \bar{E} : \qquad p_i(x_1, x_2) = x_i, \quad i = 1, 2;$$

   sont continues de $(\bar{E}, \bar{d})$ dans (E, d).
3. En déduire que :

   $(\bar{E}, \bar{d})$ compact $\Longrightarrow$ (E, d) compact.

4. Soit $(\bar{x}_n)$ une suite de $\bar{E}$. Montrer que
$$(\bar{x}_n) \text{ converge dans } (\bar{E}, \bar{d}) \Longleftrightarrow \text{ les suites } (p_1(\bar{x}_n)),\ (p_2(\bar{x}_n)) \text{ convergent dans } (E, d).$$
Dans ce cas montrer que
$$\lim \bar{x}_n = (\lim p_1(\bar{x}_n),\ \lim p_2(\bar{x}_n)).$$
5. Montrer que

   (E, d) compact $\Longrightarrow (\bar{E}, \bar{d})$ compact.
6. Soit A et B deux parties de E. Préciser les ensembles $p_1^{-1}(A)$, $p_2^{-1}(B)$, $p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B)$, $i_b^{-1}(A \times B)$ et $j_a^{-1}(A \times B)$ où $(a, b) \in A \times B$. En déduire que $A \times B$ est une partie ouverte (resp. fermée) dans $(\bar{E}, \bar{d})$ si et seulement si A et B sont des parties ouvertes (resp. fermées) de (E, d).
7. En utilisant les résultats des points 3 et 5 montrer que tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ est compact (pour la métrique produit de $\mathbb{R}^2$). En déduire qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Exercice (4 points)

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, et A et B deux parties de E. Montrer que :
1. $\text{int}\,(A \cap B) = \text{int}\,(A) \cap \text{int}\,(B)$.
2. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
3. $\text{int}\,(A \cup B) \supset \text{int}\,(A) \cup \text{int}\,(B)$.
4. $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
5. Donner un exemple pour montrer que les deux dernières inclusions peuvent être strictes.

Examen de Topologie

du 07 octobre 2003 (durée : 3 heures)

Questions de cours (7 points)

1. Définissez les notions suivantes :
   (i) Partie ouverte d'un espace métrique (E, d).
   (ii) La topologie d'un sous-espace topologique.
   (iii) La topologie produit d'une famille d'espaces topologiques.
   (iv) Partie connexe d'un espace topologique.
   (v) La topologie de l'espace dual d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

2. Énoncer et démontrer le théorème de Heine.

Exercice I. (7 points)

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}[X]$ des applications polynomiales réelles. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $P \in E$ on pose $\delta_a(P) = P(a)$.

1. Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par
$$N(P) = \sup_{t \in]0,1[} |P(t)|,$$
est bien définie et qu'elle est une norme sur E.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\delta_a : E \to \mathbb{R}$ est linéaire.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\delta_a : E \to \mathbb{R}$ est continue de (E, N) dans $((\mathbb{R}, |\cdot|)$ si et seulement si a est un point adhérent à $]0, 1[$.
4. Etudier la continuité de (E, N) dans (E, N) des endomorphismes $D : E \to E$ et $I : E \to E$ définis par
$$\forall P \in E,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad D(P)(t) = P'(t), \qquad I(P)(t) = \int_0^t P(s)ds.$$
Que dire sur la continuité de $D \circ I$ et de $I \circ D$?

Exercice II. (7 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E.

1. Montrer que, si A est une partie compacte et B est une partie fermée, alors la partie $C = A + B$, i.e. $C = \{a + b | \, a \in A, \; b \in B\}$, est fermée.
2. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple (vous pouvez vous placer dans $\mathbb{R}$), que la condition *«A partie compacte»* ne peut pas être remplacée, dans le point précédent, par la condition plus faible *«A partie fermée»* , i.e. on peut trouver deux parties fermés A et B telles que la partie $A + B$ ne soit pas fermée.
3. Montrer que, si les deux parties A et B sont compactes, alors la partie $C = A + B$ est compacte.
4. Supposons maintenant que la partie A est ouverte (B quelconque). Montrer alors que la partie $A + B$ est ouverte (vous pouvez commencer par le cas où $B = \{b\}$ est un singleton).
5. Dans ce point on considère un sous-espace vectoriel F de E. Montrer que, si F est une partie ouverte de E, alors $F = E$.

Année 2003

Département des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques

TOP

Examen de Topologie

du 26 mai 2003 (durée : 3 heures)

Questions de cours (7 points)

1. Énoncer le théorème de Baire (appelé parfois *lemme* de Baire), ainsi que le théorème du point fixe de Picard-Banach-Cacciopolli.
2. Démontrer (selon vos préférences) **un seul** des théorèmes énoncés ci-dessus.

Problème (Sur les applications continues sur un compact.) (10 points)

On considère deux espaces métriques (E, d), (E', d'), l'espace (E', d') étant complet. Soit K une partie compacte, non vide de E. On note $\mathcal{C}(K; E')$ l'ensemble d'applications continues de (K, d_K) dans (E', d'), où d_K est la distance induite par d sur K, i.e., pour tout $(x, y) \in K^2$ on a $d_K(x, y) = d(x, y)$.

Pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}(K; E') \times \mathcal{C}(K; E')$ on pose

$$\delta(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) |\ x \in K\}. \tag{10}$$

1. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(K; E') \times \mathcal{C}(K; E')$. Montrer que l'application $x \mapsto d'(f(x), g(x))$ de (K, d_K) dans $\mathbb{R}$ (avec sa topologie usuelle) est continue. En déduire que $\delta(f, g)$ est un réel positif (fini !), et expliquer pourquoi dans la formule (10) on peut remplacer «sup» par «max» .
2. Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{C}(K; E')$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}(K; E'), \delta)$.

   I. Montrer que

   $$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\, (\forall x \in K)\, (\forall n, m \in \mathbb{N})\ \ n, m \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon. \tag{11}$$

   En déduire que, pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E' noté $f(x)$ dans ce qui suit.

   II. Montrer que l'application $x \mapsto f(x)$ est continue sur K.

   III. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{C}(K; E'), \delta)$. Conclusion ?

4. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $(\mathcal{C}(K; E'), \delta)$, d'adhérence compacte. Pour tout $x \in K$, on note A_x la partie de E' définie par $A_x = \{f(x) |\ f \in \mathcal{A}\}$, et on considère l'application $\Delta_x : (\mathcal{C}(K; E'), \delta) \to (E', d')$ définie par $f \mapsto \Delta_x(f) = f(x)$.

   I. Montrer que, pour tout $x \in K$, l'application Δ_x est continue (en fait vous pouvez dire plus !).

   II. Préciser l'image de $\mathcal{A}$ par Δ_x, $(x \in K)$. En déduire que, pour tout $x \in K$, l'adhérence $\overline{A}_x$ de A_x est une partie compacte de (E', d').

III. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partie finie $\{g_1, \ldots, g_n\}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}$ soit couvert par la famille $(B(g_i, \varepsilon))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de boules ouvertes de centre g_i et de rayon ε.

Montrer ensuite qu'il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que

$$(\forall x, x' \in K)\ (\forall i \in [\![1, n]\!]) \qquad d(x, x') < \eta_\varepsilon \Longrightarrow d'(g_i(x), g_i(x')) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

En déduire que la famille de fonctions $\mathcal{A}$ est *uniformément équicontinue,* i.e.,

$$(\forall f \in \mathcal{A})\ (\forall x, x' \in K) \qquad d(x, x') < \eta_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Exercice (Sur une équation intégrale) (6 points)

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $N : E \to \mathbb{R}$, par $f \mapsto N(f) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E. En utilisant le problème précédent, 3. III., en déduire que (E, N) est un espace de Banach.
2. Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application non nulle, continue (en considérant sur $[0, 1] \times [0, 1]$ la topologie induite pas celle de $\mathbb{R}^2$ (en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé), et sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle).

A. Montrer qu'il existe $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tel que,

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \qquad |K(a, b)| \geqslant |K(x, y)|, \tag{13}$$

et $|K(a, b)| > 0$.

B. Montrer que pour tout réel λ vérifiant

$$|\lambda| < \frac{1}{|K(a, b)|}, \tag{14}$$

(où l'élément (a, b) vérifie (13)) et pour tout $\varphi \in E$, l'équation d'inconnue $f \in E$:

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y)\ \mathrm{d}y + \varphi(x),$$

admet une solution unique.

C. Soit λ un réel non nul vérifiant (14). On considère l'application $f \mapsto T(f)$, où, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$T(f)(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Montrer que T est une application de E dans E, linéaire, continue (pour la topologie de la norme N) et bijective. Cette application est-elle un homéomorphisme de (E, N) dans (E, N) ?

Département des
Sciences et Techniques

Année 2003

Licence de Mathématiques
TOP

Contrôle continu de Topologie

du 29 avril 2003 (durée : 2 heures)

Questions de cours (7 points)

I. Définissez les notions suivantes :

1. Espace topologique ;
2. Point adhérent ;
3. Application entre deux espaces topologiques continue en un point ;
4. Partie connexe d'un espace topologique ;
5. Partie compacte d'un espace topologique.

II. Énoncer et démontrer le théorème sur les propriétés des compacts dans un espace topologique.

Problème. (8 points)

Soit $(E,\ \mathrm{d})$ un espace métrique. Pour toute partie non vide A de E, et pour tout $x \in E$ on pose

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\ \mathrm{d}(x, y) |\ y \in A\}.$$

1. Montrer que
$$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \text{ il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de } A \text{ telle que } x = \lim_{n\to\infty} a_n.$$
2. Montrer que pour toute partie bornée, non vide X de $\mathbb{R}$ on a
$$\inf X \in \bar{X}.$$
En déduire que, pour toute partie non vide A de E
$$\mathrm{d}(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}. \tag{15}$$
3. Montrer que pour A fixé, l'application $x \mapsto\ \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne sur E.

4. Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que l'on a

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset \iff \text{ il existe deux ouverts disjoints } U \text{ et } V \text{ de } E \text{ tels que } A \subset U \text{ et } B \subset V.$$

Indication. Pour l'implication «$\Longrightarrow$» on pourrait considérer l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(x, B)$.

5. Soient A et B deux fermés de E, non vides et disjoints. Montrer qu'il existe une application continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(A) = \{0\}$ et $\varphi(B) = \{1\}$. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice (5 points)

On considère la partie $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle (induite par la métrique euclidienne).

1. Montrer que S^1 est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que S^1 est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une application continue.
   (i) Montrer que l'application $g : S^1 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in S^1$ par
   $$g(x, y) = f(x, y) - f(-x, -y)$$
   est continue sur S^1.
   (ii) Montrer que $a = \inf g(S^1)$ et $b = \sup g(S^1)$ sont des nombres réels (finis), $g(S^1) = [a, b]$, et $a \cdot b \leqslant 0$.
   (iii) En déduire qu'il existe un point $(x^*, y^*) \in S^1$ tel que $f(x^*, y^*) = f(-x^*, -y^*)$.

Table des matières